第49卷第1期 数学学报中文版 Vol.49, No.1
2006年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)01-0111-08 **文献标识码: A**

广义幂比较置换理想

陈焕良

湖南师范大学数学与计算机科学学院 长沙 410081
E-mail: chyzxl@hunnu.edu.cn

摘　要 在置换理想上, 我们引进了一类广义幂比较; 得到了置换理想为广义 cu- 理想的等价刻画, 并推广了置换广义 cu- 环的相关结果.

关键词 置换理想; 广义幂比较; 广义 cu- 理想
MR(2000) 主题分类 16E50
中图分类 O153

Generalized Power Comparability for Exchange Ideals

Huan Yin CHEN

College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081*, P. R. China*
E-mail: chyzxl@hunnu.edu.cn

Abstract In this paper, we introduce a new class of partially power comparability and get a number of necessary and sufficient conditions for an exchange ideal to be a generalized cu-ideal. These results extend the corresponding theorems for exchange generalized cu-rings.

Keywords exchange ideal; power comparability; generalized cu-Ideal
MR(2000) Subject Classification 16E50
Chinese Library Classification 0153

0 引言

设 R 是带单位元 1 的结合环. 称环 R 满足幂替换, 如果 $aR+bR=R \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}, Q \in M_n(R)$, 使得 $aI_n+bQ \in GL_n(R)$ (见文 [1]). 我们知道, 如果环 R 满足幂替换, 那么 R 满足幂消去, i.e., $R \oplus B \cong R \oplus C \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}$, 使得 $B^n \cong C^n$. 许多作者研究了幂替换, 如文 [2–5].

环 R 称为置换环, 如果对每一个右 R- 模 A 和对任意的两个直和分解 $A=M' \oplus N = \bigoplus_{i\in I} A_i$, 都存在子模 $A_i' \subseteq A_i$, 使得 $A = M' \oplus (\bigoplus_{i\in I} A_i')$, 其中 $M_R' \cong R_R$, 序集 I 是有限的. 正则环、半完备环、半正则环、π- 正则环、强 π- 正则环和具有实秩为 1 的 C^*- 代数都是置换环 (见文 [6–8]).

为了把幂替换推广到模比较, 作者引进了 cu- 环 [9]. 文 [10] 中, Li et al. 推广了 cu- 环, 引进了广义 cu- 环. 环 R 称为广义 cu- 环, 如果 $aR+bR=R \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}, Q \in M_n(R)$, 使得 aI_n+bQ 是相关可逆的. 他们证明了置换环 R 是 cu- 环当且仅当 $R \oplus B \cong R \oplus C \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}, e \in B(R)$,

收稿日期: 2004-08-26; 接受日期: 2004-11-25

使得 $B^ne \leq^{\oplus} C^ne$ 和 $B^n(1-e) \leq^{\oplus} C^n(1-e)$ (见文 [10, 定理 7]). 根据文 [11,12], 环 R 的理想 I 称为置换理想如果对任何 $x \in I$, 有幂等元 $e \in R$, 使得 $e \in Rx$ 和 $1-e \in R(1-x)$. 显然, 强 π- 正则理想为置换理想, 更有置换环的理想为置换理想.

在置换理想上, 引进了一类广义幂比较, 得到了置换理想为广义 cu- 理想的等价刻画, 并推广了置换广义 cu- 环的相关结果. 文 [10, 定理 9] 中证明了相关单位 π- 正则的正则环为广义 cu- 环. 我们证明了相关单位 π- 正则环为广义 cu- 环. 而在正则条件下, 该结论还可由满元素刻画.

在本文中, 环是带单位元 1 的结合环, 模为右酉模. $M_n(R)$ 表示 R 上单位为 I_n 的 $n \times n$ 矩阵环, $GL_n(R)$ 表示 R 上的 n 维一般线性群, $U(R)$ 为 R 中可逆元集合, $B(R)$ 表示 R 的中心幂等元集合, $\mathbb{N}$ 表示自然数集合. 称 $x \in R$ 为正则, 如果有 $y \in R$, 使得 $x = xyx$. 环 R 为正则, 如果 R 中元素为正则的.

1 广义幂比较

由文 [13], 称 $u \in R$ 为相关可逆的, 如果有 $e \in B(R)$, 使得 $eu \in eR$ 左可逆, 而 $(1-e)u \in (1-e)R$ 右可逆. 本节研究置换理想上广义幂比较.

定义 1.1 设 I 为环 R 的置换理想, 称 I 为广义 cu- 理想, 如果对任何正则 $x \in 1+I$, 有 $n \in \mathbb{N}$ 和相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 xU 为幂等的.

可以证明广义 cu- 环的理想为广义 cu- 理想. 事实上, 广义 cu- 理想是广义 cu- 环的非平凡推广.

定理 1.2 设 I 为环 R 的置换理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) $aR + bR = R$, $a \in 1+I$, $b \in I \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $Q \in M_n(R)$, 使得 $aI_n + bQ \in M_n(R)$ 为相关可逆.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 假定 $aR + bR = R, a \in 1+I, b \in I$, 有 $x, y \in R$, 使得 $ax + by = 1$. 因为 I 为环 R 的置换理想, 根据文 [11, 引理 1.1], 有 $s, t \in R$, 使得 $e = bys$ 和 $1 - e = (1-by)t = axt$, 从而 $(1-e)axt(1-e) + e = 1$. 显然, $e \in I$ 而且 $(1-e)a \in 1+I$ 正则. 进而有 $n \in \mathbb{N}$ 和相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $E := (1-e)aU$ 为幂等的. 由于 $U \in M_n(R)$ 相关可逆, 有 $F \in B\big(M_n(R)\big)$, 使得 FU 右可逆和 $(I_n - F)U$ 左可逆. 假定 $FUV = F$, 有 $EVxt(1-e)F + eF = (1-e)aFUVxt(1-e) + eF = F$, 从而 $EVxt(1-e)(I_n - E)F + e(I_n - E)F = (I_n - E)F$, 即

$$(1-e)aUF + e(I_n - E)F = EF + e(I_n - E)F = F - EVxt(1-e)(I_n - E)F.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\big(aI_n + bys(aI_n + (I_n - E)V)\big)F &= \big((1-e)aI_n + e(I_n - E)V\big)F \\ &= \big(I_n - EVxt(1-e)(I_n - E)\big)VF.\end{aligned}$$

假定 $(I_n - F)VU = I_n - F$. 类似地, 有 $Z \in M_n(R)$, 使得 $(aI_n + bZ)(I_n - F) \in (I_n - F)M_n(R)$ 右可逆, 从而有 $Q \in M_n(R)$, 使得 $aI_n + bQ \in M_n(R)$ 为相关可逆, 即得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 假定 $x \in 1+I$ 正则, 则有 $y \in R$, 使得 $x = xyx$. 显然, $y \in 1+I$. 由 $yx + (1-yx) = 1$, 得 $n \in \mathbb{N}$, $Q \in M_n(R)$, 使得 $U := yI_n + (1-yx)Q \in M_n(R)$ 为相关可逆, 所以 $xU = x\big(yI_n + (1-yx)Q\big) = xyI_n$ 为幂等的, 从而 I 为广义 cu- 理想.

设 I 为环 R 的置换理想, 根据定理 1.2, 对正则 $x\in I$, 有 $n\in\mathtt{N}$, 使得 xI_n 是幂等矩阵和相关可逆阵的积. 下面把 [10, 命题 6] 推广到广义 cu- 理想.

推论 1.3 设 I 为环 R 的置换广义 cu- 理想, 则对任何幂等元 $e\in I$, eRe 是置换广义 cu- 环.

证明 设 $e\in I$ 为幂等元. 显然 eRe 为置换环. 假定 $ax+b=e$, $a,x,b\in eRe$, 则 $(a+1-e)(x+1-e)+b=1$, $a+1-e\in 1+I$ 而且 $b\in I$. 由定理 1.2, 有 $n\in\mathtt{N}$, $Q\in M_n(R)$, 使得 $(a+1-e)I_n+bQ=U\in M_n(R)$ 为相关可逆, 从而有 $E\in B\big(M_n(R)\big)$, 使得 $EUV=E$ 且 $(I_n-E)WU=I_n-E$. 显然 $(1-e)I_n=(1-e)U$, 从而 $Ue=eUe$, 因此

$$(eWe)\big(aI_n+b(eQe)\big)(eI_ne-eEe)=eI_ne-eEe.$$

另外, $\big((a+1-e)I_n+bQ\big)VE=E$, 故有 $(1-e)VE=(1-e)E$, 进而 $VeE=eVeE$, 所以 $\big(aI_n+b(eQe)\big)(eVe)(eEe)=eEe$. 因为 $eEe\in B\big(M_n(eRe)\big)$, 得到 $aI_n+b(eQe)\in M_n(eRe)$ 相关可逆, 所以 eRe 是置换广义 cu- 环.

引理 1.4 设 I 为环 R 的置换理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) 对任何正则 $a\in 1+I$, 有相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $aI_n=aUa$.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 对任何正则 $a\in 1+I$, 有相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $aI_n=aUa$. 令 $E=aU$, 则 $E\in M_n(R)$ 是幂等的, 从而 I 为广义 cu- 理想.

(1) $\Rightarrow$ (2) 令 $a\in 1+I$ 正则, 则有 $x\in R$, 使得 $a=axa$. 显然, $x\in 1+I$. 由于 $yx+(1-yx)=1$, 有 $Q\in M_n(R)$, 使得 $U:=yI_n+(1-yx)Q\in M_n(R)$ 相关可逆.

设 I 为环 R 的置换广义 cu- 理想, 类似可证: 对任何正则 $a\in I$, 有相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $aI_n=aUa$. 称 $a\stackrel{\sim}{-}b$ via $1+I$, 如果有 $x,y,z\in 1+I$, 使得 $a=zbx, b=xay, x=xyx=xzx$. 类似于 [14, 引理 6], $a\stackrel{\sim}{-}b$ via $1+I$ 等价于有 $x,y\in 1+I$, 使得 $a=xby, b=yax, x=xyx$ 和 $y=yxy$.

定理 1.5 设 I 为环 R 的置换理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) $a\stackrel{\sim}{-}b$ via $1+I\Longrightarrow\ \exists n\in\mathtt{N}$, 相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $aU=Ub$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 假定 $a\stackrel{\sim}{-}b$ via $1+I$, 则有 $x,y\in 1+I$, 使得 $a=xby$, $b=yax$, $x=xyx$ and $y=yxy$. 根据引理 1.4, 有 $n\in\mathtt{N}$ 和相关可逆 $V\in M_n(R)$, 使得 $yI_n=yVy$. 令 $U=(I_n-xyI_n-Vy)V(I_n-yxI_n-yV)$, 易知

$$(I_n-xyI_n-Vy)^2=I_n=(I_n-yxI_n-yV)^2,$$

从而 $U\in M_n(R)$ 相关可逆. 进一步地, 有

$$\begin{aligned}aU&=a(I_n-xyI_n-Vy)V(I_n-yxI_n-yV)=-aVyV(I_n-yxI_n-yV)\\&=-aV(I_n-yxI_n-yV)=axI_n.\end{aligned}$$

另外, $Ub=(I_n-xyI_n-Vy)V(I_n-yxI_n-yV)b=-(I_n-xyI_n-Vy)Vb=xyVb=xbI_n$. 显然 $ax=xbyx=xb$, 所以 $aU=Ub$.

(2)$\Rightarrow$(1) 设 $x\in 1+I$ 正则, 有 $y\in R$, 使得 $x=xyx$ 和 $y=yxy$. 令 $e=yx$ 和 $f=xy$, 则

$$e=yfx,\quad f=xey,\quad x=xyx\ \text{ 和 }\ y=yxy.$$

显然, $y\in 1+I$. 从而 $e\overline{\sim}f$ via $1+I$. 由假定有 $n\in\mathbb{N}$ 和相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $eU=Uf$, 更有 $(1-e)U=U(1-f)$. 显然 $\eta:(eR)^n=(xR)^n\cong(fR)^n$. 定义 $\alpha:\big((1-e)R\big)^n\to\big((1-f)R\big)^n$, 其中 $((1-e)r_1,\dots,(1-e)r_n)^T\to(1-f)U(r_1,\dots,r_n)^T$, 对任何 $(r_1,\dots,r_n)^T\in R^n$; 定义 $\phi:R^n=(xR)^n\oplus\big((1-xy)R\big)^n\to(yxR)^n\oplus\big((1-yx)R\big)^n$, 其中 $\phi(x_1+x_2)=\eta(x_1)+\alpha(x_2)$, 对任何 $x_1\in(xR)^n, x_2\in\big((1-xy)R\big)^n$. 可得 $xI_n=xVx$, 其中 V 是 ϕ 的对应矩阵. 根据引理 1.4, I 为广义 cu- 理想.

推论 1.6 设 R 为置换环, 则下述等价:

(1) R 为广义 cu- 环. (2) 对幂等元 $e,f\in R$, $eR\cong fR\Longrightarrow\exists n\in\mathbb{N}$ 和相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $eU=Uf$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 对幂等元 $e,f\in R$, 如果 $eR\cong fR$, 有 $a\in eRf$ 和 $b\in fRe$, 使得 $e=ab$ 和 $f=ba$, 从而 $e\overline{\sim}f$ via $1+R$. 根据定理 1.5, 有 $n\in\mathbb{N}$ 和相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $eU=Uf$.

(2)$\Rightarrow$(1) 任给正则 $x\in 1+I$, 有 $y\in 1+I$, 使得 $x=xyx$ 和 $y=yxy$. 令 $e=yx$ 和 $f=xy$, 有 $eR\cong fR$. 从而有 $n\in\mathbb{N}$ 和相关可逆 $U\in M_n(R)$, 使得 $eU=Uf$. 类似于定理 1.5, 有 $xI_n=xVx$, 其中 $V\in M_n(R)$ 相关可逆即得.

2 相关单位正则性

称 $x\in R$ 为相关单位正则, 如果有相关可逆 $u\in R$, 使得 $x=xux$. 本节把文 [10, 定理 9] 推广到置换广义 cu- 理想, 我们看到文 [10, 定理 9] 中正则性假定可以减弱.

引理 2.1 设 $a\in R$ 为相关单位正则, 则有幂等元 $e\in R$ 和相关可逆 $u\in R$, 使得 $a=eu$.

证明 因为 $a\in R$ 为相关单位正则, 有相关可逆 $v\in R$, 使得 $a=ava$. 由 $av+(1-av)=1$ 和 $v\in R$ 相关可逆, 根据文 [15, 引理 1], 可找到 $y\in R$, 使得 $a+(1-av)y=u\in R$ 相关可逆, 从而 $a=ava=(av)u$. 显然, $av=(av)^2$, 从而即得.

引理 2.2 设 I 为环 R 的置换理想, 假定对任何正则 $x,y\in 1+I$, 有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $A\in M_n(R)$, 使得 xI_n-A 是幂等元和相关可逆元的积, $I_n-yA\in GL_n(R)$, 那么 I 为广义 cu- 理想.

证明 假定 $ax+b=1, a\in 1+I, b\in I$. 因 I 为环 R 的置换理想, 有幂等元 $e\in R$, 使得 $e=bs$ 和 $1-e=(1-b)t$, 其中 $s,t\in R$, 因此 $axt+e=(1-b)t+e=1$, 更有 $(1-e)axt(1-e)+e=1$. 由 $a\in 1+I$ 和 $b\in I$, 得 $(1-e)a\in 1+I$ 和 $xt(1-e)\in 1+I$. 易知它们是正则的, 从而有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $A\in M_n(R)$, 使得 $(1-e)aI_n-A=EU$ 和 $I_n-xt(1-e)A\in GL_n(R)$, 这里 $E\in M_n(R)$ 幂等而 $U\in M_n(R)$ 相关可逆. 由 $I_n-xt(1-e)A\in GL_n(R)$, 有

$$I_n-Axt(1-e)=V\in GL_n(R),$$

即 $EUxt(1-e)+eI_n=V$. 进而 $V^{-1}EUxt(1-e)+V^{-1}eI_n=I_n$. 显然 $V^{-1}EU\in M_n(R)$ 相关可逆. 根据文 [15, 引理 1], 存在 $Y\in M_n(R)$, 使得 $xt(1-e)I_n+ZV^{-1}e\in M_n(R)$ 为相关可逆. 再利用文 [15, 引理 1], 存在 $Z\in M_n(R)$, 使得 $(1-e)aI_n+eZ\in M_n(R)$ 相关可逆, 更有

$$aI_n+e(Z-aI_n)=aI_n+bs(Z-aI_n)\in M_n(R)$$

相关可逆. 由定理 1.2, I 为广义 cu- 理想.

引理 2.3 设 $u\in R$ 相关可逆, $V\in GL_n(R)$, 则 $\begin{pmatrix} 0 & u \\ V & * \end{pmatrix}\in M_{n+1}(R)$ 相关可逆.

证明 因为 $u\in R$ 相关可逆, 存在 $e\in B(R)$, 使得 $eu\in eR$ 右可逆, 而 $(1-e)u\in(1-e)R$ 左可逆. 假定 $euv=e$ 和 $(1-e)wu=1-e$. 令 $E=\mathrm{diag}\,(e,e,\dots,e)\in M_{n+1}(R)$, 则 $E\in B\big(M_{n+1}(R)\big)$. 进一步地

$$E\begin{pmatrix}0&u\\V&*\end{pmatrix}\in EM_{n+1}(R)$$

右可逆, 而

$$(I_{n+1}-E)\begin{pmatrix}0&u\\V&*\end{pmatrix}\in(I_{n+1}-E)M_{n+1}(R)$$

左可逆, 即得.

易知, $E\in B\big(M_n(R)\big)$ 当且仅当 $E=\mathrm{diag}\,(e,e,\dots,e)$, 其中 $e\in B(R)$.

类似于文 [8, 定理 3.2], 我们也有:

定理 2.4 设 I 为环 R 的置换理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) 对任何正则 $x\in 1+I$, 有 $m,n\in\mathbb{N}$, 使得 x^mI_n 为相关单位正则.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由引理 1.4 即得.

(2)$\Rightarrow$(1) 设 $x,y\in 1+I$ 正则, 令

$$A=\begin{pmatrix}0_n&\cdots&0_n&0_n\\I_n&\cdots&0_n&0_n\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0_n&\cdots&I_n&0_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}I_n&xI_n&\cdots&x^{m-1}I_n\\0_n&I_n&\cdots&0_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0_n&0_n&\cdots&I_n\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}y^{m-1}I_n&\cdots&yI_n&I_n\\I_n&\cdots&0_n&0_n\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0_n&\cdots&I_n&0_n\end{pmatrix}\in M_{mn}(R).$$

易知

$$B(xI_{mn}-A)=\begin{pmatrix}0_n&\cdots&0_n&x^mI_n\\-I_n&\cdots&0_n&*\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0_n&\cdots&xI_n&*\\0_n&\cdots&-I_n&*\end{pmatrix},$$

$$C(I_{mn}-yA)=\begin{pmatrix}0_n&\cdots&0_n&I_n\\I_n&\cdots&0_n&*\\-yI_n&\cdots&0_n&*\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0_n&\cdots&I_n&*\end{pmatrix}.$$

显然 $B,C\in GL_{mn}(R)$, 从而 $I_{mn}-yA\in GL_{mn}(R)$. 进一步地

$$xI_{mn}-A=B^{-1}\begin{pmatrix}0_n&\cdots&0_n&x^mI_n\\-I_n&\cdots&0_n&*\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0_n&\cdots&xI_n&*\\0_n&\cdots&-I_n&*\end{pmatrix}$$

由于 $x^m I_n \in M_m(R)$ 为相关单位正则, 由引理 2.1, 有幂等元 $e \in M_m(R)$ 和相关可逆 $u \in M_m(R)$, 使得 $x^m I_n = eu$, 因此类似于文 [8, 定理 3.2], 可得

$$xI_{mn} - A = B^{-1}\begin{pmatrix} e & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & \cdots & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & \cdots & 0_n & u \\ -I_n & \cdots & 0_n & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & \cdots & xI_n & * \\ 0_n & \cdots & -I_n & * \end{pmatrix}.$$

令 $E = B^{-1}\mathrm{diag}\,(e, 1, \ldots, 1)B$, 则 $B^{-1}\mathrm{diag}\,(e, 1, \ldots, 1) = EB^{-1}$ 而且 $E = E^2$. 因为 $u \in M_n(R)$ 相关可逆, 由引理 2.3,

$$\begin{pmatrix} 0_n & \cdots & 0_n & u \\ -I_n & \cdots & 0_n & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & \cdots & xI_n & * \\ 0_n & \cdots & -I_n & * \end{pmatrix}$$

相关可逆, 从而更有

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 0_n & \cdots & 0_n & u \\ -I_n & \cdots & 0_n & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & \cdots & xI_n & * \\ 0_n & \cdots & -I_n & * \end{pmatrix} \in M_{mn}(R)$$

相关可逆, 亦即 $xI_{mn} - A$ 是幂等矩阵和相关可逆阵的积, 再由引理 2.2 即得.

环 R 的理想 I 称为相关单位 π- 正则, 如果对任何 $x \in 1 + I$ 有 $n \in \mathbb{N}$ 和相关可逆 $u \in R$, 使得 $x^n = x^n u x^n$. 下面把文 [10, 定理 9] 推广为下述结论.

推论 2.5 相关单位 π- 正则理想是广义 cu- 理想.

证明 设 I 为 R 的相关单位 π- 正则理想, $x \in 1 + I$, 有 $m \in \mathbb{N}$ 和相关可逆 $u \in R$, 使得 $x^m = x^m u x^m$, 因此 $x^m u \in R$ 是幂等的. 令 $f = ux^m$ 和 $e = f + (1 - f)x^m f$, 有 $e \in 1 + I$ 是幂等的. 而且

$$e \in Rx \text{ 和 } \ 1 - e = (1 - f)(1 - x^m f) \in R(1 - x),$$

故 I 是 R 的置换理想, 从而根据定理 2.4, I 是广义 cu- 理想.

文 [10, 定理 9] 证明了相关单位 π- 正则的正则环是广义 cu- 环. 设 $k \neq 0$ 为域, $R = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$, 易知 R 为有界的强 π- 正则环, 从而它为相关单位 π- 正则环, 但显然它不是正则环. 由推论 2.5, 我们有相关单位 π- 正则环是广义 cu- 环, 从而 R 也是广义 cu- 环.

3 正则环的满元素

称 $a \in R$ 是满的, 如果 $RaR = R$. 易知 $a \in R$ 是满的当且仅当 a 不在 R 的任何真理想中. 在文 [16] 中, Ara 和 Goodearl 研究了满 corners 的稳定秩. 本节我们用正则环的满元素刻画广义 cu- 理想 (见文 [17]).

引理 3.1 设 I 为正则环 R 的理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) $aR+bR=R$, $a\in 1+I$ 满, $b\in I \Longrightarrow \exists n\in \mathtt{N}$, $Q\in M_n(R)$, 使得 $aI_n+bQ\in M_n(R)$ 相关可逆.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 1.1 即得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $ax+b=1$, $a\in 1+I$, $b\in R$. 因为 R 是正则环, 它是置换环; 从而由文 [18, 定理 2], 有 $y\in R$, 使得 $a+by\in R$ 为满的. 显见 $a+by\in 1+I$. 从而由 $(a+by)x+b(1-yx)=1$, 有 $n\in \mathtt{N}$, $Q\in M_n(R)$, 使得 $(a+by)I_n+b(1-yx)Q\in M_n(R)$ 相关可逆, 所以 $aI_n+b\big(yI_n+b(1-yx)Q\big)$ 相关可逆, 再根据定理 1.2, I 为广义 cu- 理想.

引理 3.2 设 I 为正则环 R 的理想, 假定对任何满 $x\in 1+I$ 和 $y\in 1+I$, 有

$$n\in \mathtt{N} \ \ 和 \ \ A\in M_n(R),$$

使得 xI_n-A 是幂等元和相关可逆元的积, $I_n-yA\in GL_n(R)$, 那么 I 为广义 cu- 理想.

证明 假定 $ax+b=1$, 其中 $a\in 1+I$ 满的, $b\in I$. 显然 $x\in 1+I$, 由假定知, 有

$$n\in \mathtt{N}, \ \ A\in M_n(R),$$

使得 $aI_n-A=EU$ 和 $I_n-xA\in GL_n(R)$, 其中 $E\in M_n(R)$ 幂等, $U\in M_n(R)$ 相关可逆. 因为 $I_n-xA\in GL_n(R)$, $I_n-Ax=V\in GL_n(R)$, 因此 $EUx+bI_n=V$; 所以, $V^{-1}EUx+V^{-1}bI_n=I_n$. 类似于引理 2.2, 有 $Z\in M_n(R)$, 使得 $aI_n+bZ\in M_n(R)$ 相关可逆, 再由引理 3.1 即得.

定理 3.3 设 I 为正则环 R 的理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) 对任何满 $x\in 1+I$, 有 $m,n\in \mathtt{N}$, 使得 x^mI_n 为相关单位正则.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 2.4 即得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 令 $x\in 1+I$ 满的, $y\in 1+I$. 令

$$A=\begin{pmatrix} 0_n & \cdots & 0_n & 0_n\\ I_n & \cdots & 0_n & 0_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0_n & \cdots & I_n & 0_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} I_n & xI_n & \cdots & x^{m-1}I_n\\ 0_n & I_n & \cdots & 0_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0_n & 0_n & \cdots & I_n \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} y^{m-1}I_n & \cdots & yI_n & I_n\\ I_n & \cdots & 0_n & 0_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0_n & \cdots & I_n & 0_n \end{pmatrix}\in M_{mn}(R).$$

类似于定理 2.4, $I_{mn}-yA\in GL_{mn}(R)$ 而且 $xI_{mn}-A$ 是幂等元和相关可逆元的积, 根据引理 3.2 得 I 为广义 cu- 理想.

推论 3.4 正则环 R 是广义 cu- 环当且仅当对任何满 $x\in R$, 有 $m,n\in \mathtt{N}$, 使得 x^mI_n 为相关单位正则.

证明 由定理 3.3 即得.

对正则环, 可把文 [10, 定理 9] 推广为：设 R 是正则环, 如果满 $a\in R$ 是相关单位 π- 正则, 则 R 是广义 cu- 环. 由引理 1.4 和定理 3.3, 我们有

引理 3.5 设 I 为正则环 R 的理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) 对任何满 $a \in 1+I$, 有相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $aI_n = aUa$.

定理 3.6 设 I 为正则环 R 的理想, 则下述等价:

(1) I 为广义 cu- 理想.

(2) 对任何满 $a, b \in R$, $a \precsim b$ via $1+I \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}$, 相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $aU = Ub$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) (1)$\Rightarrow$(2) 由定理 1.5 即得.

(2)$\Rightarrow$(1) 任给满的 $x \in 1+I$, 有 $y \in R$, 使得 $x = xyx$ 和 $y = yxy$. 显然 $y \in 1+I$. 令 $e = yx$ 和 $f = xy$, 则 $e = yfx$, $f = xey$, $x = xyx$ 和 $y = yxy$, 从而 $e \precsim f$ via $1+I$. 由 $RxR = R$, 得 $ReR = RfR = R$, 亦即 $e, f \in R$ 为满的. 所以有 $n \in \mathtt{N}$, 相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $eU = Uf$. 类似于定理 1.5, 可得 xI_n 相关可逆, 所以根据引理 3.5 得 I 为广义 cu- 理想.

由此可见, 正则环 R 为广义 cu- 环当且仅当任何满 $a, b \in R$, $a \precsim b \Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}$ 和相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $aU = Ub$. 称 $a \in R$ 强 π- 正则, 如果有

$$n \in N, \quad x \in R,$$

使得 $a^n = a^{n+1}x$, $ax = xa$ 和 $x = xax$. 称 x 为 a 的 Drazin 逆, 记为 a^d. 设 I 为正则环 R 的理想, 类似于定理 3.6, 可以证明 I 为广义 cu- 理想当且仅当对任何满 $a, b \in 1+I$, ab 和 ba 强 π-正则 $\Longrightarrow \exists n \in \mathtt{N}$ 和相关可逆 $U \in M_n(R)$, 使得 $(ab)^d U = U(ba)^d$.

参 考 文 献

[1] Lam T. Y., Modules with isomorphic multiples and rings isomorphic matrix rings, a survey. Monographie No. **35** de l'Enseignement Mathematique, Geneve, 1999.

[2] Camps R., Menal P., Power substitution property for rings of continuous functions, *J. Algeb.*, 1993, **161**: 455–466.

[3] Chen H., Exchange rings, related comparability and power-substitution, *Comm. Algeb.*, 1998, **26**: 3383–3401.

[4] Camps R., Menal P., Power cancellation for artinian modules, *Comm. Algeb.*, 1991, **19**: 2081–2095.

[5] Goodearl K. R., Cancellation of Low-rank vector bundles, *Pacific J. Math.* 1984, **113**: 289–301.

[6] Ara P., Goodearl K. R., O'Meara K. C., Pardo E., Separative cancellation for projective modules over exchange rings, *Israel J. Math.*, 1998, **105**: 105–137.

[7] Wu T., The power-substitution condition of endomorphism rings of quasi-projective modules, *Comm. Algeb.*, 2000, **28**: 407–418.

[8] Chen H., Power-substitution, exchange rings, unit π-regularity, *Comm. Algeb.*, 2000, **28**: 5223–5233.

[9] Chen H., On power comparability of modules, *Chin. Adv. Math.*, 2001, **30**: 340–346.

[10] Li Q., Zhu J., Tong W., On related power comparability of modules, *Comm. Algeb.*, 2003, **31**: 4925–4938.

[11] Ara P., Extensions of exchange rings, *J. Algeb.*, 1997, **197**: 409–423.

[12] Perera F., Lifting units modulo exchange ideals and C^*-algebras with real rank zero, *J. Reine. Math.*, 2000, **522**: 51–62.

[13] Chen H., Related comparability over exchange rings, *Comm. Algeb.*, 1999, **27**: 4209–4216.

[14] Chen H., On exchange QB-rings, *Comm. Algeb.*, 2003, **31**: 831–841.

[15] Chen H., Comparability of modules over regular rings, *Comm. Algeb.*, 1997, **25**: 3531–3543.

[16] Ara P., Goodearl K. R., Stable rank of corner rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2005, bf 133: 379–386.

[17] Goodearl K. R., Von neumann regular rings, 2nd ed., Krieger, Malabar, Fl., 1991.

[18] Chen H., Full elements in regular rings, *Taiwanese J. Math.*, 2004, **8**: 203-‘-209.