

DOI: 10.12386/A20210007

文献标识码: A

三角矩阵环上的余挠对与稳定范畴

任 伟 张春霞

重庆师范大学数学科学学院 重庆 401331

E-mail: wren@cqnu.edu.cn; cxzhang@cqnu.edu.cn

摘 要 通常用“小环” A, B 上模的性质刻画三角矩阵环 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 上的模. 我们反过来用“大环” T 上的模范畴的模型结构, 刻画了“小环” A, B 上的 Gorenstein 投射模的稳定范畴 $\underline{\mathcal{GP}}(A), \underline{\mathcal{GP}}(B)$. 为此, 首先要引入 Gorenstein 投射 T -模范畴的两个子范畴, 并构造了与之对应的两个完备余挠对. 此外, 将模的余挠对推广到复形范畴, 并研究了复形的同伦范畴中的等价与粘合.

关键词 余挠对; Gorenstein 投射模; 稳定范畴; 同伦范畴

MR(2010) 主题分类 18E30, 55U35, 16E65

中图分类 O154.2

Cotorsion Pairs and Stable Categories over Triangular Matrix Rings

Wei REN Chun Xia ZHANG

*School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,
Chongqing 401331, P. R. China*

E-mail: wren@cqnu.edu.cn; cxzhang@cqnu.edu.cn

Abstract In general, the properties of modules over a triangular matrix ring $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ are studied via modules over diagonal “small rings” A and B . However, we use model structures on the category of T -modules to characterize the stable categories $\underline{\mathcal{GP}}(A), \underline{\mathcal{GP}}(B)$ of Gorenstein projective modules over A and B . To this end, we introduce two subcategories of Gorenstein T -modules, and obtain two corresponding complete cotorsion pairs. Moreover, cotorsion pairs of modules are lifted to T -complexes, and the equivalences and recollements of homotopy categories of complexes are studied.

Keywords cotorsion pair; Gorenstein projective module; stable category; homotopy category

MR(2010) Subject Classification 18E30, 55U35, 16E65

Chinese Library Classification O154.2

收稿日期: 2021-01-13; 接受日期: 2021-06-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11871125);

重庆市自然科学基金 (cstc2018jcyjAX0541) 及重庆市教委科学技术研究项目 (KJQN201800509)

通讯作者: 张春霞

1 引言

设 A, B 是环, U 是 A - B -双模. 三角矩阵环 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 上的模可由三元组 $(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix})_\varphi$ 来表示, 其中 $X \in A\text{-Mod}$, $Y \in B\text{-Mod}$, $\varphi: U \otimes_B Y \rightarrow X$ 是 A -模同态 (见文 [2, III.2]), 故三角矩阵环在 Artin 代数的表示理论中广受关注. 环的单点扩张是三角矩阵环. 特别的, 当 $A = B$ 时, 矩阵环 T 即为 A 与 U 的平凡扩张, 通常记为 $A \ltimes U$.

三角矩阵环上的模的很多性质, 都能通过它在“小环” A 与 B 上的分量来刻画. 由文 [2, 14] 知, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M}$ 是投射 T -模当且仅当 $\varphi_M: U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1$ 是单同态, $\text{Coker } \varphi_M$ 是投射 A -模, M_2 是投射 B -模.

称 M 是 Gorenstein 投射模^[9], 是指存在全零调复形 (totally acyclic complex) $\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots$, 使得 $M \cong \text{Ker}(P_0 \rightarrow P_{-1})$. 注意到在 Iwanaga-Gorenstein 环 (即具有有限左, 右自内射维数的双边 Noether 环) 上, 有限生成的 Gorenstein 投射模即极大 Cohen-Macaulay 模. Gorenstein 投射 R -模范畴 $\mathcal{GP}(R)$ 的一个重要特征在于它是一个 Frobenius 范畴, 其投射—内射对象为投射 R -模, 故其稳定范畴 $\underline{\mathcal{GP}}(R)$ 是三角范畴. 众所周知, 在 Iwanaga-Gorenstein 环上, $\underline{\mathcal{GP}}(R)$ 与奇点范畴 $\text{D}_{\text{sg}}(R)$ 是三角等价的^[22].

三角矩阵环上的 Gorenstein 同调性质也得到了广泛研究^[6, 8, 11, 18, 21]. 若 ${}_A U$ 具有有限投射维数, U_B 具有有限平坦维数, 且 T 是 Gorenstein 正则环 (即 Gorenstein 整体维数有限的环), 则 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M}$ 是 Gorenstein 投射 T -模当且仅当 $\varphi_M: U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1$ 是单同态, $\text{Coker } \varphi_M$ 是 Gorenstein 投射 A -模, M_2 是 Gorenstein 投射 B -模 (见文 [21, 定理 1.4] 及 [8, 定理 3.5]).

自然要问: 反之, 能否通过“大环” T 上的模来刻画“小环” A 与 B 上模的一些性质? 首先, 我们引入 T -模范畴的两个子范畴.

定义 1.1 令 \mathcal{P} 和 \mathcal{GP} 分别表示投射和 Gorenstein 投射模的类.

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M} \left| \varphi_M: U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1 \text{ 是单同态, } \text{Coker } \varphi_M \in \mathcal{GP}(A), M_2 \in \mathcal{P}(B) \right. \right\},$$

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M} \left| \varphi_M: U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1 \text{ 是单同态, } \text{Coker } \varphi_M \in \mathcal{P}(A), M_2 \in \mathcal{GP}(B) \right. \right\}.$$

下面总是假设 T 是 Gorenstein 正则环, 其中 ${}_A U$ 的投射维数和 U_B 的平坦维数都有限. 在第 2 节, 我们得到如下结论.

定理 A 存在 T -模范畴中的余挠对 $(\mathcal{C}_i, \mathcal{W}_i)$ 与 $(\mathcal{W}_i, \mathcal{F}_i)$ ($j = 1, 2, 3$). 上述余挠对都可由集合余生成, 其中

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \left| \text{pd}_A L_1 < \infty \right. \right\}, \quad \mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \left| \text{pd}_B L_2 < \infty \right. \right\}.$$

进而, 它们满足等式 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_1$, $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{F}_2$ 与 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$.

由文 [4, 16] 知, 存在余挠对与模型范畴之间的对应: Abel 范畴 \mathcal{A} 上存在模型结构当且仅当 \mathcal{A} 中存在完备余挠对 $(\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_f \cap \mathcal{A}_{\text{tri}})$ 与 $(\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}, \mathcal{A}_f)$. 我们记相应的模型结构为 $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_{\text{tri}}, \mathcal{A}_f)$. 注意到上纤维化—纤维化对象构成的子范畴 $\mathcal{A}_{cf} = \mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_f$ 是一个 Frobenius 范畴, $\omega = \mathcal{A}_{cf} \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$ 为其投射—内射对象构成的类. 进而, 可得三角范畴的等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{A}_{cf}/\omega$, 这里 $\text{Ho}(\mathcal{M})$ 是模型范畴 \mathcal{A} 的同伦范畴, 由 \mathcal{A} 关于弱等价作局部化得到.

第 3 节, 我们由上述余挠对及模型结构的 Bousfield 局部化, 得到 T -模范畴上的模型结构 (见定理 3.1 及命题 3.3), 并刻画 “小环” A, B 上 Gorenstein 投射与内射模的稳定范畴.

定理 B 存在范畴的等价:

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{GP}}(A) &\simeq \text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{inj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{inj}} / \mathcal{M}_2^{\text{inj}}) \simeq \underline{\mathcal{GI}}(A), \\ \underline{\mathcal{GP}}(B) &\simeq \text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{inj}}) \xrightleftharpoons[R]{L} \text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{inj}} / \mathcal{M}_1^{\text{inj}}) \simeq \underline{\mathcal{GI}}(B),\end{aligned}$$

其中 “L” 与 “R” 分别表示恒等伴随函子的左, 右导出函子.

第 4 节, 我们考虑在什么条件下能将 T -模范畴中的余挠对提升到复形范畴中.

定理 C (1) 在复形范畴 $\text{Ch}(T)$ 中有完备余挠对 $(d\widetilde{\mathcal{C}}_i, \widetilde{\mathcal{W}}_i)$ 与 $(\widetilde{\mathcal{W}}_i, d\widetilde{\mathcal{F}}_i)$. 进而, 有复形的同伦范畴间的三角等价 $K(\mathcal{C}_i) \simeq K(\mathcal{F}_i)$, 其中当 B 的整体维数有限时 $i = 1$, 当 A 的整体维数有限时 $i = 2$.

(2) 存在左粘合

$$K(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i^*} K(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{j^!} K(\mathcal{P}(B)),$$

若 U 是投射 A -模, 则有粘合

$$K(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i^*} K(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{j^!} K(\mathcal{P}(B)).$$

2 三角矩阵环上模的余挠对

贯穿全文, 环均指有单位元的结合环; 若非特殊说明, 模均指左模. 设 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是三角矩阵环, 其中 U 是 A - B -双模. 任意左 T -模均可表示为 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\varphi$, 其中 $M_1 \in A\text{-Mod}$, $M_2 \in B\text{-Mod}$, $\varphi: U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1$ 是 A -模同态. 等价地, 任意左 T -模也可表示为 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_\psi$, 其中 $\psi: M_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, M_1)$ 是 B -模同态.

我们定义两个赋值函子 $e^1: T\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ 与 $e^2: T\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ 分别为 $e^1\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = X$, $e^2\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = Y$. 这两个函子都有左, 右伴随函子 (见文 [11, 第 98 页]). 我们用下标 λ 与 ρ 分别记它们的左, 右伴随函子. 对任意 A -模 M 与任意 B -模 N , $e_\lambda^1(M) = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_\rho^1(M) = \begin{pmatrix} M \\ \text{Hom}_A(U, M) \end{pmatrix}$, $e_\lambda^2(N) = \begin{pmatrix} U \otimes_B N \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_\rho^2(N) = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$.

对定义 1.1 中的子范畴 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 , 我们有以下刻画.

命题 2.1 $\mathcal{C}_2 \simeq \{e_\lambda^1(Q) \oplus e_\lambda^2(Y) \mid Q \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{GP}(B)\}$. 若 ${}_A U$ 具有有限投射维数, 则 $\mathcal{C}_1 \simeq \{e_\lambda^1(X) \oplus e_\lambda^2(P) \mid X \in \mathcal{GP}(A), P \in \mathcal{P}(B)\}$.

证明 当 $\text{Coker } \varphi_M \in \mathcal{P}(A)$ 时, A -模的正合序列 $0 \rightarrow U \otimes_B M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow \text{Coker } \varphi_M \rightarrow 0$ 可裂, $M_1 \cong \text{Coker } \varphi_M \oplus (U \otimes_B M_2)$. 从而 $M \cong e_\lambda^1(\text{Coker } \varphi_M) \oplus e_\lambda^2(M_2)$. 故 \mathcal{C}_2 中的模必形如 $e_\lambda^1(Q) \oplus e_\lambda^2(Y)$, 其中 $Q \in \mathcal{P}(A)$, $Y \in \mathcal{GP}(B)$.

设 ${}_A U$ 具有有限投射维数, $M_2 \in \mathcal{P}(B)$, 则 $U \otimes_B M_2$ 具有有限投射维数. 若 $\text{Coker } \varphi_M \in \mathcal{GP}(A)$, 则 $\text{Ext}_A^1(\text{Coker } \varphi_M, U \otimes_B M_2) = 0$, 上述正合序列可裂. 类似地, 我们可知 \mathcal{C}_1 中的模形如 $e_\lambda^1(X) \oplus e_\lambda^2(P)$, 其中 $X \in \mathcal{GP}(A)$, $P \in \mathcal{P}(B)$. 证毕.

设 \mathcal{A} 是具有足够投射, 内射对象的 Abel 范畴, \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 是 \mathcal{A} 的子范畴. 称 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是余挠对, 如果 $\mathcal{X} = {}^\perp \mathcal{Y} := \{X \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathcal{Y}\}$ 且 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp := \{Y \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$. 称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完备的 (complete), 如果对任意 $M \in \mathcal{A}$, 存在短正合序列 $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$ 及 $0 \rightarrow M \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow 0$, 其中 $X, X' \in \mathcal{X}, Y, Y' \in \mathcal{Y}$. 此时, 称 $X \rightarrow M$ 为特殊的右 \mathcal{X} -逼近, 称 $M \rightarrow Y'$ 为特殊的左 \mathcal{Y} -逼近. 如果有 \mathcal{X} 中对象的集合 \mathcal{S} , 使得 $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^\perp$, 则称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 由集合 \mathcal{S} 余生成. 由文 [7], 集合余生成的余挠对是完备的.

由文 [8, 定理 3.1] 知 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是 Gorenstein 正则环当且仅当 A 与 B 都是 Gorenstein 正则环. 由文 [21] 可知 U 的投射 (平坦) 维数的有限性与环的 Gorenstein 性质的联系.

定理 2.2 设 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 其中 A 的投射维数与 U_B 的平坦维数都有限. 若 A 是 Gorenstein 正则环, 则 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{W}_1)$ 是由集合余生成的余挠对; 若 B 是 Gorenstein 正则环, 则 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{W}_2)$ 是由集合余生成的余挠对. 此处

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \middle| \text{pd}_A L_1 < \infty \right\}, \quad \mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \middle| \text{pd}_B L_2 < \infty \right\}.$$

证明 首先证明 \mathcal{C}_1 是一个 Kaplansky 类 (见文 [10, 定义 2.1] 或 [12, 定义 4.9]). 对任意 $M \in \mathcal{C}_1$, 由命题 2.1 可设 $M = e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q)$, 其中 $G \in \mathcal{GP}(A), Q \in \mathcal{P}(B)$. 设 $\aleph > \max\{|T|, \aleph_0\}$ 是无穷基数, $L \leq M$ 是任意子模且 $|L| \leq \aleph$. 我们需要证明: 存在 M 的子模 N , 使得 $L \leq N$, $|N| \leq \aleph, N \in \mathcal{C}_1$ 且 $M/N \in \mathcal{C}_1$.

设 $\iota: L \rightarrow M$ 是标准嵌入, $\pi_1: M \rightarrow e_\lambda^1(G), \pi_2: M \rightarrow e_\lambda^2(Q)$ 是标准投射. 令 $M' = \pi_1 \iota(L), M'' = \pi_2 \iota(L)$. 易知 L 是 $M' \oplus M''$ 的子模, 且 $|M'|, |M''| \leq \aleph$. 注意到 M'' 是投射 T -模 $e_\lambda^2(Q)$ 的子模, 由 Kaplansky 定理 (见文 [17]), 存在投射 T -模 $N'' \leq e_\lambda^2(Q)$ 使得 $M'' \leq N'', |N''| \leq \aleph$ 且 $e_\lambda^2(Q)/N'' \in \mathcal{P}(T)$. 由文 [14, 定理 3.1], $N'' = e_\lambda^1(X) \oplus e_\lambda^2(Y)$, 其中 $X \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(B)$. 由文 [19, 定理 2.7] 的证明可知, 存在 $e_\lambda^1(G)$ 的子模 N' , 满足 $M' \leq N', |N'| \leq \aleph$, 且 N' 和 $e_\lambda^1(G)/N'$ 都是 Gorenstein 投射 T -模. 不妨令 $N' = e_\lambda^1(H)$, 其中 $H \in \mathcal{GP}(A)$. 从而, 我们可令 $N = N' \oplus N'' = e_\lambda^1(H \oplus X) \oplus e_\lambda^2(Y)$.

对 Kaplansky 类 \mathcal{C}_1 中的任意模 M , 由超限归纳法的标准讨论过程 (见文 [9, 第七章]), 对序数 λ 我们可以找到 M 的子模的一个连续链 $\{M_\alpha; \alpha < \lambda\}$, 使得 $M = \bigcup_{\alpha < \lambda} M_\alpha, M_0 \in \mathcal{C}_1, M_{\alpha+1}/M_\alpha \in \mathcal{C}_1$, 且对任意 $\alpha < \lambda$, 有 $|M_0| \leq \aleph, |M_{\alpha+1}/M_\alpha| \leq \aleph$. 由于 \mathcal{C}_1 关于扩张及正向极限是封闭的, 所以每个 M_α 都属于 \mathcal{C}_1 , 从而可得 \mathcal{C}_1 中的每个模是 \mathcal{C}_1 中基数不超过 \aleph 的子模的连续链的不交并. 令 \mathcal{S} 是 \mathcal{C}_1 中基数不超过 \aleph 的模 M 的表示集, 则模 $N \in \mathcal{C}_1^\perp$ 当且仅当对任意的 $M \in \mathcal{S}$, 有 $\text{Ext}_T^1(M, N) = 0$. 从而 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1^\perp)$ 是由集合 \mathcal{S} 余生成的.

最后, 只需要证明 $\mathcal{W}_1 = \mathcal{C}_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \middle| \text{pd}_A L_1 < \infty \right\}$. 设 A 是 Gorenstein 正则环. 对任意 $G \in \mathcal{GP}(A), \text{Ext}_A^1(G, L_1) = 0$ 当且仅当 L_1 具有有限投射维数. 设 $M \cong e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q)$ 是 \mathcal{C}_1 中的任意模, $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ 是一个 T -模. 由于 e_λ^1 与 e_λ^2 保持投射对象且 $(e_\lambda^1, e^1), (e_\lambda^2, e^2)$ 是伴随对, 所以对任意 A -模 X, B -模 Y 及 $i \geq 0$, 有 $\text{Ext}_T^i(e_\lambda^1(X), L) \cong \text{Ext}_A^i(X, L_1), \text{Ext}_T^i(e_\lambda^2(Y), L) \cong \text{Ext}_B^i(Y, L_2)$. 从而, $\text{Ext}_T^1(M, L) \cong \text{Ext}_A^1(G, L_1) \oplus \text{Ext}_B^1(Q, L_2) = \text{Ext}_A^1(G, L_1)$.

令 $\mathcal{C}_3 = \mathcal{GP}(T), \mathcal{W}_3 = \mathcal{GP}(T)^\perp$. 若 T 是 Gorenstein 正则环, 由文 [19, 定理 2.7] 知 $(\mathcal{C}_3, \mathcal{W}_3)$ 是由集合余生成的. 类似上述讨论, 可证关于 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^\perp)$ 的结论. 证毕.

注意到文 [23] 中, 在不同的条件下也讨论了三角矩阵环上的余挠对.

对偶地, 在文 [8, 11] 中关于 Gorenstein 内射 T -模有如下刻画: $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\psi_M}$ 是 Gorenstein 内射的当且仅当 $\psi_M: M_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, M_1)$ 是 B -模的满态射, $M_1 \in \mathcal{GI}(A)$ 且 $\text{Ker } \psi_M \in \mathcal{GI}(B)$. 类似于定义 1.1, 我们引入 Gorenstein 内射 T -模的两个子范畴:

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\psi_M} \middle| \psi_M: M_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, M_1) \text{ 是满的, } M_1 \in \mathcal{GI}(A), \text{Ker } \psi_M \in \mathcal{I}(B) \right\},$$

$$\mathcal{F}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\psi_M} \middle| \psi_M: M_2 \rightarrow \text{Hom}_A(U, M_1) \text{ 是满的, } M_1 \in \mathcal{I}(A), \text{Ker } \psi_M \in \mathcal{GI}(B) \right\}.$$

关于 \mathcal{F}_1 与 \mathcal{F}_2 , 类似于命题 2.1 可得以下结论.

命题 2.3 $\mathcal{F}_1 \simeq \{e_\rho^1(G) \oplus e_\rho^2(I) \mid G \in \mathcal{GI}(A), I \in \mathcal{I}(B)\}$. 若 U_B 具有有限平坦维数, 则 $\mathcal{F}_2 \simeq \{e_\rho^1(E) \oplus e_\rho^2(H) \mid E \in \mathcal{I}(A), H \in \mathcal{GI}(B)\}$.

若 R 是 Iwanaga-Gorenstein 环, 在文 [16, 定理 8.4] 中证明了余挠对 $({}^\perp \mathcal{GI}(R), \mathcal{GI}(R))$ 由集合余生成. 此结论在文 [5] 中被推广至任意 Noether 环. 注意到有非 Noether 的 Gorenstein 正则环. 下面, 我们将文 [16, 定理 8.4] 推广到 Gorenstein 正则环. 令 $\mathcal{F}_3 = \mathcal{GI}(T)$, $\mathcal{W}_3 = {}^\perp \mathcal{F}_3$.

定理 2.4 设 T 是 Gorenstein 正则环, ${}_A U$ 的投射维数和 U_B 的平坦维数都有限, 则 $(\mathcal{W}_i, \mathcal{F}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 是由集合余生成的余挠对.

证明 显然, 当 T 是 Gorenstein 正则环时 $(\mathcal{W}_3, \mathcal{F}_3)$ 是余挠对. 设 $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ 是 T -模. 对 \mathcal{F}_1 中的任意模 $M \cong e_\rho^1(G) \oplus e_\rho^2(I)$, 有 $\text{Ext}_T^1(L, M) \cong \text{Ext}_T^1(L, e_\rho^1(G) \oplus e_\rho^2(I)) \cong \text{Ext}_A^1(L_1, G)$. 因此 $L \in {}^\perp \mathcal{F}_1$ 当且仅当 $L_1 \in {}^\perp \mathcal{GI}(A)$. 当 A 是 Gorenstein 正则环时, L_1 具有有限内射维数当且仅当 L_1 具有有限投射维数, 从而 ${}^\perp \mathcal{F}_1 = \mathcal{W}_1$, $(\mathcal{W}_1, \mathcal{F}_1)$ 是余挠对. 类似地, 若 B 是 Gorenstein 正则环, 可得 $(\mathcal{W}_2, \mathcal{F}_2)$ 是余挠对.

下面只证明 $(\mathcal{W}_1, \mathcal{F}_1)$ 由集合余生成. 类似可证明 $(\mathcal{W}_2, \mathcal{F}_2)$ 与 $(\mathcal{W}_3, \mathcal{F}_3)$ 是由集合余生成的.

设 $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ 是 \mathcal{W}_1 中的任意模, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L$. 显然 $x_2 \in Bx_2 = M_2$. 注意到 L_1 具有有限内射维数. 由文 [1, 命题 2.5], 存在无限基数 κ 与 L_1 的子模 M_1 , 使得 $x_1 \in M_1$, $|M_1| \leq \kappa$ 且 $M_1, L_1/M_1$ 都具有有限内射维数. 因此, 有无穷基数 $\kappa > |T| + \aleph_0$, 使得对任意 $L \in \mathcal{W}_1$ 及 $x \in L$, 存在 L 的子模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$, 满足 $x \in M$, $|M| \leq \kappa$, $M \in \mathcal{W}_1$ 且 $L/M \in \mathcal{W}_1$.

当 A 是 Gorenstein 正则环时, 具有有限内射维数的 A -模与具有有限投射维数的 A -模是一致的. 因此, \mathcal{W}_1 关于扩张与正向极限封闭. 令 \mathcal{S} 是 \mathcal{W}_1 中基数不超过 κ 的模的表示集. 由超限归纳法可证 $(\mathcal{W}_1, \mathcal{F}_1)$ 由集合 \mathcal{S} 余生成. 证毕.

命题 2.5 设 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是 Gorenstein 正则环, 其中 ${}_A U$ 的投射维数和 U_B 的平坦维数都有限, 则 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_1$, $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{F}_2$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$.

证明 包含关系 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2$ 是显然的. 设 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M} \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2$, 则存在正合序列 $0 \rightarrow U \otimes_B M_2 \xrightarrow{\varphi_M} M_1 \rightarrow \text{Coker } \varphi_M \rightarrow 0$, 使得 $\text{Coker } \varphi_M \in \mathcal{GP}(A)$, $M_2 \in \mathcal{GP}(B)$ 且 $\text{pd}_B M_2 < \infty$. 由于 Gorenstein 投射模的投射维数是零或无穷 (见文 [9, 命题 10.2.3]), $M_2 \in \mathcal{P}(B)$. 从而可知 $\text{pd}_A(U \otimes_B M_2) < \infty$, 上述正合序列可裂. 于是, $M \cong e_\lambda^1(\text{Coker } \varphi_M) \oplus e_\lambda^2(M_2) \in \mathcal{C}_1$, 由此可得包含关系 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$. 因而等式 (1) 成立.

下面证明条件 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$ 的等价性.

假设等式 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_1$ 成立. 设 $M \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$. 由余挠对 $(\mathcal{C}_3, \mathcal{W}_3)$ 的完备性可得正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow W \rightarrow C \rightarrow 0$, 其中 $W \in \mathcal{W}_3$, $C \in \mathcal{C}_3$. 由于 $W \in \mathcal{W}_3 \subseteq \mathcal{W}_2$, $M \in \mathcal{W}_2$ 且 $C \in \mathcal{W}_2$, 故

$C \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_1$. 由 $M \in \mathcal{W}_1$ 可知上述序列可裂, 从而 M 是 W 的直和项, $M \in \mathcal{W}_3$. 由此可得 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_3$. 由于 \mathcal{C}_1 与 \mathcal{C}_2 都是 \mathcal{C}_3 的子范畴, $\mathcal{W}_3 \subseteq \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ 显然成立.

假设等式 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$ 成立. 对任意 $M \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2$, 有正合序列 $0 \rightarrow W \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $C \in \mathcal{C}_1$, $W \in \mathcal{W}_1$. 注意到 $C \in \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ 且 $M \in \mathcal{W}_2$, 故 $W \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$. 从而上述序列可裂, M 是 C 的直和项, 进而 $M \in \mathcal{C}_1$. 故 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$.

类似地可证条件 $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{F}_2$ 与 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$ 的等价性. 事实上, 可以根据定义直接验证等式 $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{F}_2$. 证毕.

注 2.6 由等式 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$ 可得文 [8, 命题 2.8]: T -模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ 具有有限投射 (内射) 维数当且仅当 M_1 与 M_2 的投射 (内射) 维数都有限.

3 模型结构与稳定范畴

本节假设 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是 Gorenstein 正则环, 其中 ${}_A U$ 的投射维数和 U_B 的平坦维数都有限.

由文 [4, 第 VIII 章] 或 [16, 定理 2.2] 可知 Abel 范畴 \mathcal{A} 上的模型结构与三元组 $(\mathcal{A}_c, \mathcal{A}_{\text{tri}}, \mathcal{A}_f)$ 的对应关系, 故我们用该三元组表示相应的模型结构. 此时, (平凡的) 上纤维化为余核在 \mathcal{A}_c ($\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$) 中的单同态, (平凡的) 纤维化为核在 \mathcal{A}_f ($\mathcal{A}_f \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$) 中的满同态. 特别地, 当 $\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$ 为 \mathcal{A} 中的投射对象类 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 时, 称之为投射模型结构; 当 $\mathcal{A}_f \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$ 为内射对象类 $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ 时为内射模型结构. 模型范畴的同伦范畴 $\text{Ho}(\mathcal{M})$ 由该范畴关于弱等价做局部化得到. 由文 [15, 定理 1.2.10], 三角范畴 $\text{Ho}(\mathcal{M})$ 与 \mathcal{A}_{cf}/ω 是等价的, 其中 $\mathcal{A}_{cf} = \mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_f$ 是一个 Frobenius 范畴, $\omega = \mathcal{A}_{cf} \cap \mathcal{A}_{\text{tri}}$.

由定理 2.2 及 2.4 中的余挠对, 我们有以下结论.

定理 3.1 在 T -模范畴中, 有三个上纤维化生成的投射模型结构 $\mathcal{M}_i^{\text{proj}} = (\mathcal{C}_i, \mathcal{W}_i, T\text{-Mod})$ ($i = 1, 2, 3$). 进而有范畴等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(A)$, $\text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(B)$, $\text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{proj}}) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(T)$.

证明 由于 Gorenstein 投射模的投射维数是零或无穷 (见文 [9, 命题 10.2.3]), 易证 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_3 = \mathcal{P}(T)$. 于是可得 T -模范畴上的投射模型结构 $\mathcal{M}_i^{\text{proj}} = (\mathcal{C}_i, \mathcal{W}_i, T\text{-Mod})$ ($i = 1, 2, 3$). 由文 [16, 引理 6.7] 可知这些模型结构是上纤维化生成的.

范畴等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{proj}}) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(T)$ 与 $\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \simeq \mathcal{C}_1/\mathcal{P}(T)$ 是显然成立的. 定义函子 $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \underline{\mathcal{GP}}(A)$ 将 $e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q) \in \mathcal{C}_1$ 作用为 $G \in \underline{\mathcal{GP}}(A)$. 设 $f: e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q) \rightarrow e_\lambda^1(G') \oplus e_\lambda^2(Q')$ 是 \mathcal{C}_1 中的映射. 注意到 $\mathcal{P}(T) \simeq \{e_\lambda^1(P) \oplus e_\lambda^2(Q) \mid P \in \mathcal{P}(A), Q \in \mathcal{P}(B)\}$. 若 f 通过投射 T -模 $e_\lambda^1(P) \oplus e_\lambda^2(Q)$ 分解, 则 $G \rightarrow G'$ 可通过 $P \in \mathcal{P}(A)$ 分解. 故由函子 F 可得等价函子 $\mathcal{C}_1/\mathcal{P}(T) \rightarrow \underline{\mathcal{GP}}(A)$. 从而 $\mathcal{C}_1/\mathcal{P}(T) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(A)$ 成立. 类似地, $\text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \simeq \mathcal{C}_2/\mathcal{P}(T) \simeq \underline{\mathcal{GP}}(B)$. 证毕.

对偶地可得以下结论.

定理 3.2 在 T -模范畴中, 有三个上纤维化生成的内射模型结构 $\mathcal{M}_i^{\text{inj}} = (T\text{-Mod}, \mathcal{W}_i, \mathcal{F}_i)$ ($i = 1, 2, 3$). 进而有范畴等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{inj}}) \simeq \underline{\mathcal{GI}}(A)$, $\text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{inj}}) \simeq \underline{\mathcal{GI}}(B)$, $\text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{inj}}) \simeq \underline{\mathcal{GI}}(T)$.

由投射 (内射) 模型结构的 Bousfield 局部化可得新的模型结构, 详见文 [3, 命题 1.4.2, 1.4.6]. 若投射模型结构 $\overline{\mathcal{M}}^{\text{proj}}$ 中的上纤维化对象类包含于 $\mathcal{M}^{\text{proj}}$ 中的上纤维化对象类, 则有投射模型结构的左局部化, 记为 $\overline{\mathcal{M}}^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}^{\text{proj}}$. 若内射模型结构 $\overline{\mathcal{M}}^{\text{inj}}$ 中的纤维化对象类包含于 \mathcal{M}^{inj} 中的纤维化对象类, 则有内射模型结构的右局部化, 记为 $\mathcal{M}^{\text{inj}}/\overline{\mathcal{M}}^{\text{inj}}$.

由定理 3.1, 命题 2.5, 文 [13, 命题 3.11] 及 [3, 命题 1.4.2, 1.4.6], 可得下列结论.

命题 3.3 在 T -模范畴上, 有下列模型结构: $\mathcal{M}_1^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}} = (\mathcal{C}_3, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1)$, $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}} =$

$(\mathcal{C}_3, \mathcal{W}, \mathcal{W}_2)$, $\mathcal{M}_3^{\text{inj}}/\mathcal{M}_1^{\text{inj}} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{V}, \mathcal{F}_3)$ 与 $\mathcal{M}_3^{\text{inj}}/\mathcal{M}_2^{\text{inj}} = (\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1, \mathcal{F}_3)$, 其中 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{V} = \mathcal{F}_1$ 且 $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}_2$.

假设 \mathcal{C} 与 \mathcal{D} 是模型范畴. 称伴随对 $(F, G, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是 Quillen 伴随, 如果 F 保持上纤维化与平凡上纤维化 (等价地, G 保持纤维化对象与平凡纤维化对象). Quillen 伴随 $(F, G, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是 Quillen 等价当且仅当 $(LF, RG, R\varphi) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$ 是同伦范畴的伴随等价 (详见文 [15, 命题 1.3.13]), 这里 LF 是 F 的左导出函子, RG 是 G 的右导出函子.

显然, T -模范畴上的两个恒等函子构成伴随对. 我们可得如下结论.

定理 3.4 有范畴等价

$$\text{Ho}(\mathcal{M}_i^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_{3-i}^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}) \quad (i = 1, 2).$$

因此, 存在稳定范畴的等价

$$\mathcal{C}_2/\mathcal{P}(T) \xrightleftharpoons[\Psi]{\Phi} (\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_1)/\mathcal{P}(T),$$

其中 Φ 是特殊的左 \mathcal{W}_1 -逼近, Ψ 是特殊的右 \mathcal{C}_2 -逼近.

证明 由于 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_3$, 恒等伴随 $\mathcal{M}_1^{\text{proj}} \rightleftharpoons \mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 是 Quillen 伴随.

设 $X \in \mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{M}_1^{\text{proj}}$ 中的任意上纤维化对象. 由余挠对 $(\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}, \mathcal{W}_2)$ 的完备性可得正合序列 $0 \rightarrow X \rightarrow W_2 \rightarrow C_2 \rightarrow 0$, 其中 $W_2 \in \mathcal{W}_2$, $C_2 \in \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}_2$. 事实上, $X \rightarrow W_2$ 是平凡上纤维化, W_2 是 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 中的纤维化对象, 于是可令 X 的纤维化替换 $R(X)$ 为 W_2 . 由命题 2.5, $X \in \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, 故 $C_2 \in \mathcal{W}_2$. 从而 $X \rightarrow W_2$ 是平凡上纤维化, 也是 $\mathcal{M}_1^{\text{proj}}$ 中的弱等价.

设 $Y \in \mathcal{W}_2$ 是 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 中的任意纤维化对象. 由 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{W}_1)$ 的完备性可得正合序列 $0 \rightarrow W_1 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\delta} Y \rightarrow 0$, 其中 $\delta : C_1 \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{M}_1^{\text{proj}}$ 中的纤维化, C_1 为 Y 的上纤维化替换. 对 $W_1 \in \mathcal{W}_1$, 由 $(\mathcal{C}_2, \mathcal{W}_2)$ 的完备性, 我们有正合序列 $0 \rightarrow W_1 \rightarrow W_2 \rightarrow C_2 \rightarrow 0$. 考虑 $W_1 \rightarrow C_1$ 与 $W_1 \rightarrow W_2$ 的推出图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\delta} & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & W_2 & \dashrightarrow & Z & \xrightarrow{\gamma} & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & C_2 & = & C_2 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

由中间行可得 $Z \in \mathcal{W}_2$; 由 $C_1 \in \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ 且 $Z \in \mathcal{W}_2$ 可得 $C_2 \in \mathcal{W}_2$, 因此 $C_2 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{W}_2$ 是投射 T -模, β 是模型结构 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 中的平凡上纤维化. 由于 $C_2 \in \mathcal{W}_1$, 由最左列可得 $W_2 \in \mathcal{W}_1$. 因此 $W_2 \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$, γ 是 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 中的平凡纤维化. 从而 $\delta = \gamma\beta$ 是 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 中的弱等价.

综上, 由文 [15, 命题 1.3.13] 可以验证恒等伴随 $\mathcal{M}_1^{\text{proj}} \rightleftarrows \mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 是 Quillen 等价, 由此可得范畴等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}})$. 由命题 2.5, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_2$. 故

$$\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \simeq \mathcal{C}_1 / \mathcal{P}(T) \simeq \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}).$$

类似地, 可证恒等伴随 $\mathcal{M}_2^{\text{proj}} \rightleftarrows \mathcal{M}_1^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}$ 是 Quillen 等价. 从而诱导出同伦范畴的等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}})$. 进而, 由 $\text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}} \setminus \mathcal{M}_3^{\text{proj}}) \simeq (\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_1) / \mathcal{P}(T)$ 及 $\text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \simeq \mathcal{C}_2 / \mathcal{P}(T)$, 得到稳定范畴的等价 $\mathcal{C}_2 / \mathcal{P}(T) \xrightleftharpoons[\Psi]{\Phi} (\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{W}_1) / \mathcal{P}(T)$, 其中 Φ 取特殊的左 \mathcal{W}_1 -逼近, Ψ 取特殊的右 \mathcal{C}_2 -逼近. 证毕.

定理 3.5 有范畴等价 $\text{Ho}(\mathcal{M}_3^{\text{inj}} / \mathcal{M}_i^{\text{inj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_{3-i}^{\text{inj}})$ ($i = 1, 2$). 进而, 存在稳定范畴的等价 $(\mathcal{F}_3 \cap \mathcal{W}_2) / \mathcal{I}(T) \xrightleftharpoons[\Theta]{\Lambda} \mathcal{F}_1 / \mathcal{I}(T)$, 其中 Λ 是特殊的左 \mathcal{F}_1 -逼近, Θ 是特殊的右 \mathcal{W}_2 -逼近.

由定理 2.2, 2.4 及文 [20, 定理 3.2] 可得以下范畴的等价.

$$\text{推论 3.6} \quad \text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_1^{\text{inj}}), \quad \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{proj}}) \xrightleftharpoons[\text{Rid}]{\text{Lid}} \text{Ho}(\mathcal{M}_2^{\text{inj}}).$$

4 余挠对与复形的同伦范畴

本节讨论 T -模范畴中的余挠对什么时候可以提升到 T -模的复形范畴上, 以及复形的同伦范畴的等价.

首先回顾分解维数的概念. 设 \mathcal{A} 是具有足够投射对象与内射对象的 Abel 范畴, \mathcal{X} 是 \mathcal{A} 的子范畴, $M \in \mathcal{A}$. 称 $f: X \rightarrow M$ 是右 \mathcal{X} -逼近 (\mathcal{X} -预盖), 如果 $X \in \mathcal{X}$ 且对任意 $Y \in \mathcal{X}$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, f): \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, M)$ 是满态射. 如果 \mathcal{A} 中的每个对象都有右 \mathcal{X} -逼近, 则称 \mathcal{X} 是反变有限子范畴 (或预盖类). 此时, 任意对象 M 都有 \mathcal{X} -分解, 即有正合复形 $\cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$, 使得 $X_i \in \mathcal{X}$ 且对任意 $X \in \mathcal{X}$, 该复形被函子 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ 作用后仍然正合. 将 M 的所有 \mathcal{X} -分解的最小长度定义为 M 的 \mathcal{X} -分解维数, 记为 $\mathcal{X}\text{-resdim}(M)$. 将 \mathcal{A} 中所有对象 \mathcal{X} -分解维数的上确界定义为 \mathcal{A} 的整体 \mathcal{X} -分解维数, 记为 $\mathcal{X}\text{-gldim}(\mathcal{A})$. 对偶地, 有共变有限子范畴 (或预包类), 余分解, 余分解维数, 整体余分解维数等概念.

以下总是假设 $T = \begin{pmatrix} A & U \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是 Gorenstein 正则环, 且 ${}_A U$ 的投射维数和 U_B 的平坦维数都有有限. 用 “Gpd” 和 “pd” 分别表示 Gorenstein 投射维数和投射维数. 由于 $\mathcal{P}(T) \subseteq \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{GP}(T)$, 故 $\text{Gpd}_T M \leq \mathcal{C}_i\text{-resdim}(M) \leq \text{pd}_T M$, $i = 1, 2$.

命题 4.1 对任意左 T -模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M}$, 以下等式成立:

- (1) $\mathcal{C}_1\text{-resdim}(M) = \max\{\text{Gpd}_A(\text{Coker } \varphi_M), \text{pd}_B M_2\}$.
- (2) $\mathcal{C}_2\text{-resdim}(M) = \max\{\text{pd}_A(\text{Coker } \varphi_M), \text{Gpd}_B M_2\}$.

证明 假设 $\mathcal{C}_1\text{-resdim}(M) = m$ 有限, 则存在 T -模的正合序列:

$$0 \longrightarrow e_{\lambda}^1(G_m) \oplus e_{\lambda}^2(P_m) \longrightarrow \cdots \longrightarrow e_{\lambda}^1(G_1) \oplus e_{\lambda}^2(P_1) \longrightarrow e_{\lambda}^1(G_0) \oplus e_{\lambda}^2(P_0) \longrightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi_M} \longrightarrow 0,$$

其中 G_i 是 Gorenstein 投射 A -模, P_i 是投射 B -模. 由正合序列 $0 \rightarrow P_m \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow$

$M_2 \rightarrow 0$ 可得 $\mathrm{pd}_B M_2 \leq m$. 考虑以下正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & U \otimes_B P_m & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & U \otimes_B P_1 & \longrightarrow & U \otimes_B P_0 & \longrightarrow & U \otimes_B M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G_m \oplus U \otimes_B P_m & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 \oplus U \otimes_B P_1 & \longrightarrow & G_0 \oplus U \otimes_B P_0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

可得正合序列 $0 \rightarrow G_m \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow \mathrm{Coker} \varphi_M \rightarrow 0$, 从而 $\mathrm{Gpd}_B(\mathrm{Coker} \varphi_M) \leq m$.

反之, 若 $\max\{\mathrm{Gpd}_A(\mathrm{Coker} \varphi_M), \mathrm{pd}_B M_2\} = n$, 则有正合序列 $0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow \mathrm{Coker} \varphi_M \rightarrow 0$ 与 $0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$. 令 $C_i = e_\lambda^1(G_i) \oplus e_\lambda^2(P_i)$, $0 \leq i \leq n$. 可得长度为 n 的 C_1 -分解 $0 \rightarrow C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 即 $C_1\text{-resdim}(M) \leq n$. 类似地可以证明 (2). 证毕.

由文 [8, 定理 3.1], T 是 Gorenstein 正则环当且仅当 A 与 B 都是 Gorenstein 正则环. 此时, 环 T , A , B 的 Gorenstein 整体维数都有限.

推论 4.2 T 的整体 C_1 -分解维数有限当且仅当 B 的整体维数有限, T 的整体 C_2 -分解维数有限当且仅当 A 的整体维数有限.

设 \mathcal{X} 是子模的类. 我们用 $dw\tilde{\mathcal{X}}$ 表示所有由 \mathcal{X} 中的模构成的复形的子范畴, 用 $\tilde{\mathcal{X}}$ 表示由所有上循环 $Z^n C \in \mathcal{X}$ 的正合复形 C 构成的子范畴, 用 $K(\mathcal{X})$ 表示由 \mathcal{X} 中模构成的复形的同伦范畴.

由文 [20, 引理 5.2, 定理 5.4], 我们可得以下结论.

定理 4.3 在 T -模的复形范畴 $\mathrm{Ch}(T)$ 上有模型结构 $\widetilde{\mathcal{M}}_i^{\mathrm{proj}} = (dw\tilde{\mathcal{C}}_i, \widetilde{\mathcal{W}}_i, \mathrm{Ch}(T))$ 与 $\widetilde{\mathcal{M}}_i^{\mathrm{inj}} = (\mathrm{Ch}(T), \widetilde{\mathcal{W}}_i, dw\tilde{\mathcal{F}}_i)$. 进而, 有三角范畴的等价 $K(\mathcal{C}_i) \simeq \mathrm{Ho}(\widetilde{\mathcal{M}}_i^{\mathrm{proj}}) \simeq \mathrm{Ho}(\widetilde{\mathcal{M}}_i^{\mathrm{inj}}) \simeq K(\mathcal{F}_i)$, 其中 $\mathrm{gldim}(B) < \infty$ 时, $i = 1$, $\mathrm{gldim}(A) < \infty$ 时, $i = 2$.

关于三角范畴的粘合的概念, 参考文献 [22].

定理 4.4 存在左粘合

$$K(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i_*} K(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{j_!} K(\mathcal{P}(B)).$$

进而, 若 U 是投射 A -模, 则存在粘合

$$K(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i_*} K(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{j_!} K(\mathcal{P}(B)).$$

证明 首先证明这些函子的存在性. 由命题 2.1 得忠实平衡函子 $i_* = e_\lambda^1 : K(\mathcal{GP}(A)) \rightarrow K(\mathcal{C}_1)$. 设 $M = e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(P)$, $N = e_\lambda^1(G') \oplus e_\lambda^2(P')$ 是 \mathcal{C}_1 中的任意模. 同态 $M \rightarrow N$ 诱导出 A -模同态 $G \rightarrow G'$, 其中 $G = \mathrm{Coker} \varphi_M$, $G' = \mathrm{Coker} \varphi_N$. 从而对任意复形 $\mathbf{X} \in K(\mathcal{C}_1)$, 有 $i_*(\mathbf{X}) = \mathrm{Coker} \varphi_{\mathbf{X}}$, 其中 $(\mathrm{Coker} \varphi_{\mathbf{X}})_i = \mathrm{Coker} \varphi_{\mathbf{X}_i} \in \mathcal{GP}(A)$.

对任意模 $e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q) \in \mathcal{C}_1$, 考虑函子 $e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(Q) \rightarrow e_\lambda^2(Q)$ 与 $e^2 : e_\lambda^2(Q) = (U \otimes_B Q) \rightarrow Q$ 的合成. 该合成可诱导出函子 $j^* : K(\mathcal{C}_1) \rightarrow K(\mathcal{P}(B))$. 定义函子 $j_! : K(\mathcal{P}(B)) \rightarrow K(\mathcal{C}_1)$ 为 $e_\lambda^2 : K(\mathcal{P}(B)) \rightarrow K(e_\lambda^2(\mathcal{P}(B)))$ 与自然嵌入 $K(e_\lambda^2(\mathcal{P}(B))) \rightarrow K(\mathcal{C}_1)$ 的合成.

显然, $j^*i_* = 0$, 从而 $\mathrm{Im}i_* = K(e_\lambda^1(\mathcal{GP}(A))) \subseteq \mathrm{Ker}j^*$. 对任意 $\mathbf{X} \in \mathrm{Ker}j^*$, 可假设 $\mathbf{X} = e_\lambda^1(\mathbf{G}) \oplus e_\lambda^2(\mathbf{P})$, 其中 $\mathbf{G} \in K(\mathcal{GP}(A))$, $\mathbf{P} \in K(\mathcal{P}(B))$, 则 $j^*(\mathbf{X}) = \mathbf{P}$ 是可收缩复形 (contractible complex), 故 $e_\lambda^2(\mathbf{P})$ 也是可收缩的, 在同伦范畴 $K(\mathcal{C}_1)$ 中 $e_\lambda^2(\mathbf{P}) = 0$. 于是 $\mathbf{X} \in \mathrm{Im}i_*$, 从而 $\mathrm{Im}i_* = \mathrm{Ker}j^*$.

对任意模 $M = e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(P) \in \mathcal{C}_1$ 与任意 $X \in \mathcal{GP}(A)$, 存在自然同构 $\text{Hom}_T(M, e_\lambda^1(X)) \cong \text{Hom}_A(\text{Coker } \varphi_M, X) = \text{Hom}_A(G, X)$. 因此 (i^*, i_*) 是伴随对. 由于 (e_λ^2, e^2) 是伴随对, 可知 $(j_!, j^*)$ 也是伴随对. 从而 $\text{K}(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i^*} \text{K}(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{j_!} \text{K}(\mathcal{P}(B))$ 是左粘合.

若 AU 是投射的, 则对任意投射 B -模 P , $U \otimes_B P$ 是投射 A -模. 对任意 $M = e_\lambda^1(G) \oplus e_\lambda^2(P) \in \mathcal{C}_1$, 有 $e^1(M) = G \oplus U \otimes_B P \in \mathcal{GP}(A)$. 由函子 $e^1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{GP}(A)$ 可得函子 $i^! : \text{K}(\mathcal{C}_1) \rightarrow \text{K}(\mathcal{GP}(A))$. 可知 $(i_*, i^!)$ 是伴随对. 因此由

$$\text{K}(\mathcal{GP}(A)) \xleftarrow{i^*} \text{K}(\mathcal{C}_1) \xleftarrow{i^!} \text{K}(\mathcal{C}_1)/\text{Im } i^* = \text{K}(e_\lambda^2(\mathcal{P}(B))) \simeq \text{K}(\mathcal{P}(B)),$$

可得上述粘合. 证毕.

致谢 感谢审稿人的建议.

参 考 文 献

- [1] Aldrich S. T., Enochs E. E., Envelopes and covers by modules of finite injective and projective dimensions, *J. Algebra*, 2001, **242**: 447–459.
- [2] Auslander M., Reiten I., Smalø S. O., Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] Becker H., Models for singularity categories, *Adv. Math.*, 2014, **254**: 187–232.
- [4] Beligiannis A., Reiten I., Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **188**(883), 2007.
- [5] Bravo D., Gillespie J., Hovey M., The stable category of a general ring, arXiv:1405.5768.
- [6] Chen X. W., Singularity categories, Schur functors and triangular matrix rings, *Algebra Represent. Theory*, 2009, **12**: 181–191.
- [7] Eklof P., Trlifaj J., How to make Ext vanish, *Bull. London Math. Soc.*, 2001, **23**: 41–51.
- [8] Enochs E. E., Cortés-Izurdiaga M., Torrecillas B., Gorenstein conditions over triangular matrix rings, *J. Pure Appl. Algebra*, 2014, **218**: 1544–1554.
- [9] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Relative homological algebra, De Gruyter Expositions in Mathematics, No. 30, New York: Walter De Gruyter, 2000.
- [10] Enochs E. E., López-Ramos J. A., Kaplansky classes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 2002, **107**: 67–79.
- [11] Eshraghi H., Hafezi R., Salari S., et al., Gorenstein projective modules over triangular matrix rings, *Algebra Colloq.*, 2016, **23**(1): 97–104.
- [12] Gillespie J., Kaplansky classes and derived categories, *Math. Z.*, 2007, **257**: 811–843.
- [13] Gillespie J., Gorenstein complexes and recollements from cotorsion pairs, *Adv. Math.*, 2016, **291**: 859–911.
- [14] Haghany A., Varadarajan K., Study of modules over formal triangular matrix rings, *J. Pure Appl. Algebra*, 2000, **147**(1): 41–58.
- [15] Hovey M., Model Categories, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, Amer. Math. Soc., 1999.
- [16] Hovey M., Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory, *Math. Z.*, 2002, **241**: 553–592.
- [17] Kaplansky I., Projective modules, *Ann. Math.*, 1958, **68**: 372–377.
- [18] Li H. H., Zheng Y. F., Hu J. S., et al., Gorenstein projective modules and recollement over triangular matrix rings, *Comm. Algebra*, 2020, **48**(11): 4932–4947.
- [19] Ren W., Gorenstein projective modules and Frobenius extensions, *Sci. China Math.*, 2018, **61**(7): 1175–1186.
- [20] Ren W., Applications of cotorsion triples, *Comm. Algebra*, 2019, **47**(7): 2727–2741.
- [21] Zhang P., Gorenstein-projective modules and symmetric recollements, *J. Algebra*, 2013, **388**: 65–80.
- [22] Zhang P., Triangulated Categories and Derived Categories (in Chinese), Science Press, Beijing, 2015.
- [23] Zhu R. M., Peng Y. Y., Ding N. Q., Recollements associated to cotorsion pairs over upper triangular matrix rings, *Publ. Math. Debrecen*, 2021, **98**: 83–113.