

文章编号: 0583-1431(2020)01-0019-08

文献标识码: A

Gorenstein Prüfer 整环的一些新刻画

熊 涛

西华师范大学数学与信息学院 南充 637002
E-mail: Taoxiong2004@163.com

摘 要 设 R 是整环. 众所周知, R 是 Prüfer 整环当且仅当每个可除模是 FP- 内射模当且仅当每个 h - 可除模是 FP- 内射模. 本文引进了一种新的 Gorenstein FP- 内射模, 并且证明了 R 是 Gorenstein Prüfer 整环当且仅当每个可除模是 Gorenstein FP- 内射模, 当且仅当每个 h - 可除模是 Gorenstein FP- 内射模.

关键词 Gorenstein FP- 内射模; Gorenstein Prüfer 整环; 可除模; h - 可除模

MR(2010) 主题分类 16E05, 16E10

中图分类 O153.3, O154

Some Characterizations of Gorenstein Prüfer Domains

Tao XIONG

*College of Mathematics and Information,
China West Normal University, Nanchong 637002, P. R. China
E-mail: Taoxiong2004@163.com*

Abstract It is well known that a domain R is a Prüfer domain if and only if every divisible module is FP-injective; if and only if every h -divisible module is FP-injective. In this paper, we introduce the concept of Gorenstein FP-injective modules, and show that a domain R is a Gorenstein Prüfer domain if and only if every divisible module is Gorenstein FP-injective; if and only if every h -divisible module is Gorenstein FP-injective.

Keywords Gorenstein FP-injective modules; Gorenstein Prüfer Domains; divisible modules; h -divisible modules

MR(2010) Subject Classification 16E05, 16E10

Chinese Library Classification O153.3, O154

1 引言

本文如非特别交代, R 是带有单位元的交换环, 所有的模均指酉模. 对 R - 模 M , $\text{pd}_R M$ (resp. $\text{id}_R M$, resp. $\text{fd}_R M$) 是指 M 的投射 (resp. 内射, resp. 平坦) 维数; $M^+ = \text{Hom}_Z(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 代表 M 的特征模. 我们用 $w.\text{gl.dim}(R)$ (resp. $\text{gl.dim}(R)$) 表示 R 的弱整体 (resp. 整体) 维数.

收稿日期: 2018-12-20; 接受日期: 2019-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671283); 国家自然科学基金青年科学基金资助项目 (11701398); 教育部博士点科研基金资助项目 (20125134110002); 西华师范大学博士科研启动项目 (17E087)

R -模 D 称为可除模是指对所有 $a \in R$, 都有 $\text{Ext}_R^1(R/aR, D) = 0$; R -模 M 称为 h -可除模是指它是一个内射模的满同态像. 注意, 内射模和 h -可除模均是可除模.

可除模与 h -可除模在刻画整环方面发挥了重要作用. 众所周知, 整环 R 是 Dedekind 整环当且仅当每个可除模是内射模; 当且仅当每个 h -可除模是内射模. R 是 Prüfer 整环当且仅当每个可除模是 FP-内射模; 当且仅当每个 h -可除模是 FP-内射模, 这里 R -模 M 称为 FP-内射模是指对任何有限表现 R -模 N , 都有 $\text{Ext}_R^1(N, M) = 0$.

回顾整环 R 称为 Matlis 整环^[21]是指 $\text{pd}_R Q \leq 1$, 这里 Q 是 R 的商域. 整环 R 是 Matlis 整环当且仅当每个可除模是 h -可除模; 当且仅当每个可除模是 K -内射的, 这里 R -模 A 称为 K -内射模是指对 R 的商域 K , $\text{Ext}_R^1(K, A) = 0$ 成立^[22].

回顾 R -模 W 称为弱内射模^[23]是指对所有平坦维数不超过 1 的模 M , 都有 $\text{Ext}_R^1(M, W) = 0$ 成立. 文 [1] 中称整环 R 为几乎完全整环 (简称 APD) 是指其商环是完全环. 文 [17, 推论 6.4.8] 证明了整环 R 是 APD 当且仅当可除模是弱内射模; 当且仅当 h -可除模是弱内射模.

R -模 M 称为 Gorenstein 投射模 (简称 G -投射)^[11]是指如果存在投射模的正合列 $\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$ 满足 $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ 且对投射模 Q , $\text{Hom}_R(-, Q)$ 能保持序列 \mathbf{P} 依然正合. 可以类似给出 Gorenstein 内射模的定义. 借助于 Gorenstein 投射分解, Gorenstein 内射分解, 对应地给出了 Gorenstein 投射维数 $\text{Gpd}_R(-)$, Gorenstein 内射维数 $\text{Gid}_R(-)$. 在文 [3] 中, Bennis 和 Mahdou 定义了环 R 的 Gorenstein 整体维数 $\text{Ggldim}(R)$, 且证明了对任何环 R , 都有

$$\begin{aligned}\text{Ggldim}(R) &= \sup\{\text{Gpd}_R M \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\} \\ &= \sup\{\text{Gid}_R M \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}.\end{aligned}$$

环 R 称为 Gorenstein 遗传环是指 $\text{Ggldim}(R) \leq 1$ 成立. 同时, Gorenstein 遗传整环称为 Gorenstein Dedekind 整环. 熊证明了整环 R 是 Gorenstein Dedekind 整环当且仅当每个可除模是 Gorenstein 内射模; 当且仅当每个 h -可除模是 Gorenstein 内射模^[29].

R -模 M 称为 Gorenstein 平坦 (即 G -平坦) 模是指如果存在平坦模的正合列

$$\mathbf{F} = \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$$

满足 $M \cong \text{Im}(F_0 \rightarrow F^0)$, 且对任何内射模 E , $E \otimes_R -$ 能保持序列 \mathbf{F} 依然正合. 模 M 的 Gorenstein 平坦维数不超过 n , 记作 $\text{Gfd}_R M \leq n$, 是指存在正合列 $0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 这里每个 F_i 是 Gorenstein 平坦模. $G\text{-}w.\text{gl.dim}(R) = \sup\{\text{Gfd}_R M \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}$ 自然定义为 R 的 Gorenstein 弱整体维数. 凝聚环 R 称为 Gorenstein 半遗传环^[25]. 如果 $G\text{-}w.\text{gl.dim}(R) \leq 1$ (等价地, R 是凝聚环且平坦模的子模是 Gorenstein 平坦的). 在文 [18] 证明了 R 是 Gorenstein 半遗传环当且仅当投射模的有限生成子模是 Gorenstein 投射的. 在文 [27] 中, 称 Gorenstein 半遗传整环为 Gorenstein Prüfer 整环. 自然地, 我们要问:

问题 1.1 我们该如何用可除模和 h -可除模来刻画 Gorenstein Prüfer 整环?

扶先辉等人在文 [16] 中引入了余纯投射模, n -余纯投射模, 强余纯投射模, 余纯投射维数等概念. R -模 M 称为 n -余纯投射模是指对任何平坦维数不超过 n 的模 N , 都有 $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$. 0 -余纯投射模简称余纯投射模. M 称为强余纯投射模是指对任何平坦模 N 及所有整数 $i \geq 0$, 都有 $\text{Ext}_R^{i+1}(M, F) = 0$. 对 R -模 M , 其余纯投射维数 $\text{cpd}_R(M)$ 被定义为满足对任何平坦 R -模 F 及任何 $i \geq 0$, 都有 $\text{Ext}_R^{n+i}(M, F) = 0$ 成立的最小非负整数 n . 自然地, 如果这样的 n 不存

在, 则记 $cpd_R(M) = \infty$. 从而模 M 有 $cpd_R(M) \leq m$ 等价于说 M 有强余纯投射分解

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

这里每个 P_i 是强余纯投射模. 环 R 的余纯投射整体维数定义为

$$cpD(R) = \sup\{cpd_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}.$$

环 R 称为 quasi-Frobenius 环, 简称 QF 环, 是指每个投射模是内射模, 等价地, 每个内射模是投射模, 见文 [14, 定理 5.3]. 文 [16, 注 4.2] 及 [31, 438 页] 表明, 环 R 是 QF 环当且仅当 $cpD(R) = 0$; 当且仅当 $\text{Ggldim}(R) = 0$. 在文 [31, 33] 中, 熊等人证明了环 R 有 $cpD(R) \leq 1$ 当且仅当投射模的每个子模是余纯投射的. 此时, 他们形象地称 R 为 CPH (Copure-Projective-Hereditary) 环, 并在文 [31, 定理 3.15] 中证明了一个整环 R 是 Gorenstein Dedekind 整环当且仅当 $cpD(R) \leq 1$.

在文 [10] 中, Enochs 与 Jenda 引入了余纯内射模和强余纯内射模的概念. R -模 M 称为余纯内射模是指对任何内射模 E , 都有 $\text{Ext}_R^1(E, M) = 0$; M 称为强余纯内射模是指对任何内射模 E 及任何整数 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(E, M) = 0$. 同时, 该文将模 M 的余纯内射维数 $cid_R M$ 定义为满足对某个内射模 E , $\text{Ext}_R^n(E, M) \neq 0$ 的最大非负整数 n . 当然, 如果这样的 n 不存在, 则记 $cid_R(M) = \infty$. 从而模 M 是强余纯内射模当且仅当 $cid_R M = 0$. 对 R -模 M , 文 [10, 引理 3.1] 证明了 $cid_R M \leq m$ 当且仅当对任何内射模 E 及任何整数 $i \geq 1$, 恒有 $\text{Ext}_R^{m+i}(E, M) = 0$. 环 R 余纯内射整体维数 $ciD(R)$ 在文 [16] 中被定义为 $\sup\{cid_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}$. 文 [15, 推论 3.5] 表明 Noether 环是 QF 环当且仅当每个模是余纯内射模. 文 [29] 证明了整环 R 是 Gorenstein Dedekind 当且仅当 $ciD(R) \leq 1$.

Enochs 和 Jenda [10] 引入了余纯平坦模等概念. R -模 M 称为余纯平坦模是指对任何内射模 E , 恒有 $\text{Tor}_1^R(E, M) = 0$ 成立; 模 M 称为强余纯平坦模是指对任何内射 R -模 E 及所有整数 $i \geq 1$, 都有 $\text{Tor}_i^R(E, M) = 0$. 毛立新与丁南庆 [24] 引入了 n -余纯平坦模. R -模 M 称为 n -余纯平坦模是指对任何满足 $\text{id}_R E \leq n$ 的 R -模 E , 都有 $\text{Tor}_1^R(E, M) = 0$. 文 [10] 将 R -模 M 的余纯平坦维数 $cfid_R M$ 定义为满足对某个内射模 R -模 E , $\text{Tor}_n^R(E, M) \neq 0$ 成立的最大非负整数 n . 当然, 如果这样的 n 不存在, 则记 $cfid_R(M) = \infty$. 从而 R -模 M 是强余纯平坦模当且仅当 $cfid_R M = 0$. 文 [15, 引理 3.2] 指出, R -模 M 有 $cfid_R M \leq m$ 当且仅当对任何内射模 E 及任何整数 $i \geq 1$, 恒有 $\text{Tor}_{m+i}^R(E, M) = 0$. $cfD(R) = \sup\{cfid_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}$ 称为环 R 的余纯平坦弱整体维数.

文 [5] 称 R 是 IF 环是指每个内射 R -模是平坦模. 文 [15, 定理 3.8] 及 [4, 命题 2.14] 表明环 R 是 IF 环当且仅当 $cfD(R) = 0$; 当且仅当 $G\text{-}w.\text{gl.dim}(R) = 0$. 熊在文 [30] 证明了环 R 是 Gorenstein 半遗传环当且仅当 R 是凝聚环且 $cfD(R) \leq 1$. 这些事实表明, 我们可借助 $cpD(R)$, $ciD(R)$ 与 $cfD(R)$ 来研究相对同调理论, 尤其是相对同调理论下的整环.

本文基于上述思想, 引入一种新的 Gorenstein FP-内射模, 证明了整环 R 是 Gorenstein Prüfer 整环当且仅当可除模是 Gorenstein FP-内射模; 当且仅当 h -可除模是 Gorenstein FP-内射模, 即解决了问题 1.1.

2 一些准备

众所周知, R -模 M 是平坦模当且仅当对任何有限表现模 N , 都有 $\text{Tor}_1^R(N, M) = 0$ 当且仅

当 M^+ 是 FP- 内射模. 对于凝聚环 R , 模 M 是 FP- 内射模当且仅当 M^+ 平坦模. 按照这个思路, 我们引入一种新的 Gorenstein FP- 内射模.

定义 2.1 (1) R 模 M 称为余纯 FP- 内射模是指对任何内射 R - 模 E , 都有 $\text{Hom}_R(M, E)$ 是余纯平坦模.

(2) R - 模 M 称为 Gorenstein FP- 内射模是指 $\text{Hom}_R(M, E)$ 是 Gorenstein 平坦 R - 模, 这里 E 是任意内射 R - 模.

下面来举一些例子.

有限表现 R - 模未必是内射模.

例 2.2 设 \mathbb{C} 是复数域, x, y 是 \mathbb{C} 上的未定元. 构造环 $R = \mathbb{C}[x, y]$. 对每个非单位元 $0 \neq a \in R$, $A = R/aR$ 是有限表现的. 现设 $M = R/(x, y)$. 由文 [31, 例 3.13], M 是余纯平坦模. 由于 $\text{Tor}_1^R(A, M) \cong M^a = \{m \in M \mid am = 0\} \neq 0$, A 不是内射模.

内射模也未必是有限表现的.

例 2.3 取整数环 $R = \mathbb{Z}$ 及有理数域 \mathbb{Q} , 则 \mathbb{Q} 是无限生成内射 R 模, 自然也不是有限表现模. 余纯内射 R - 模未必是 FP- 内射模.

例 2.4 构造环 $R = \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + 2y^2)$, 则由文 [30, 例 3.10], R 是 Gorenstein Dedekind 整环而不是 Dedekind 整环. 由文 [29, 推论 2.5], 存在一个余纯内射模 M 不是内射模. 从而 M^+ 不是平坦模. 注意 R 是凝聚环, 从而 M 不是 FP- 内射模.

现在我们讨论 FP- 内射模与余纯 FP- 内射模的关系.

命题 2.5 设 R 凝聚环, 则每个 FP- 内射 R - 模是余纯 FP- 内射模.

证明 设 M 是 FP- 内射 R - 模, 则 M^+ 平坦模. 从而 M 是余纯 FP- 内射模. 证毕.

命题 2.6 设 R 是 Artin 交换环, 则 R 是半遗传环当且仅当每个余纯 FP- 内射 R - 模是 FP- 内射模.

证明 设 R 半遗传环, M 是余纯 FP- 内射 R - 模, 则 M^+ 是余纯平坦模. 由文 [8, 定理 4.5], M^+ 平坦模. 从而由文 [6, 定理 4.1], M 是 FP- 内射模.

反之, 设 M 是余纯平坦模, E 是内射模. 由 $\text{Ext}_R^1(E, M^+) \cong \text{Tor}_1^R(M, E)^+ = 0$ 可知 M^+ 是余纯内射模. 由条件, R 是 Artin 交换环, 则由文 [10, 引理 3.6] 中的方法可知, M^{++} 余纯平坦模. 这即是说, M^+ 是余纯 FP- 内射模. 由假设, M^+ 是 FP- 内射模, 则 M 平坦模. 因此, 再由文 [8, 定理 4.5] 可得, R 是半遗传环. 证毕.

3 Gorenstein Prüfer 整环一些新刻画

集合 $C(R) = \{a \in R \mid \text{对任何 } r \in R, \text{ 都有 } ax = xa.\}$ 称为 R 的中心. R - 模 M 称为无挠模是指对任何 $x \in M$ 以及 $C(R)$ 中的非零化子 a , 我们能由 $ax = 0$ 推出 $x = 0$. 注意, 平坦模是无挠模. 整环 R 是 Prüfer 整环当且仅当每个无挠模是平坦模.

文 [34] 中称 R - 模 M 为 Ding 内射模是指如果存在内射模序列 $\mathbf{E} = \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots$ 满足 $M \cong \text{Im}(E_0 \rightarrow E^0)$, 且对任何 FP- 内射 R - 模 E , 函子 $\text{Hom}_R(E, -)$ 仍能使 \mathbf{E} 保持是正合列. 显然, Ding 内射模是 Gorenstein 内射模. 我们先给出如下引理:

引理 3.1 (文 [32, 定理 6]) 设 R 是整环, 且 $\text{cf}D(R) \leq 1$, 则 R 是凝聚环.

由文 [12, 定义 3.2.7 及引理 3.2.8], 我们也有:

引理 3.2 设 M 是 R -模, 则

- (1) M 是余纯 FP- 内射模当且仅当 M^+ 余纯平坦模.
- (2) M 是 Gorenstein FP- 内射模当且仅当 M^+ 是 Gorenstein 平坦模.

我们现在用可除模与 h -可除模来刻画 Gorenstein Prüfer 整环.

定理 3.3 对整环 R , 以下陈述等价:

- (1) R 是 Gorenstein Prüfer 整环;
- (2) $cfD(R) \leq 1$;
- (3) 每个有限生成无挠模是余纯投射模;
- (4) 每个无挠模是余纯平坦模;
- (5) 每个有限生成无挠模是 Gorenstein 投射模;
- (6) 每个无挠模是 Gorenstein 平坦模;
- (7) 每个可除模是余纯 FP- 内射模;
- (8) 每个 h -可除模是余纯 FP- 内射模;
- (9) 每个可除模是 Gorenstein FP- 内射模;
- (10) 每个 h -可除模是 Gorenstein FP- 内射模.

证明 (7) \Rightarrow (8) 与 (9) \Rightarrow (10) 是显然的.

(2) \Leftrightarrow (1) \Rightarrow (3) 由引理 3.1 及文 [30, 定理 2.5 及 2.7] 可得.

(3) \Rightarrow (4) 设 M 是无挠模, 则 $M = \varinjlim M_i$, 这里每个 M_i 是有限生成无挠模. 由假设, M_i 是余纯投射模. 由文 [16, 命题 3.7], M_i 是余纯平坦模. 因此, 由文 [12, 43 页练习 4], M 余纯平坦模.

(4) \Rightarrow (2) 设 I 是 R 的理想, E 是内射 R -模. 由条件, I 是余纯平坦的, 则由 $\text{Tor}_2^R(E, R/I) \cong \text{Tor}_1^R(E, I) = 0$ 可得 $\text{fd}_R E \leq 1$. 从而由文 [15, 推论 3.10], $cfD(R) \leq 1$ 成立.

(1) \Rightarrow (5) 设 M 是有限生成无挠模, 则 M 可嵌入到一个有限生成自由模中. 因此 M 是有限生成 Gorenstein 平坦模. 由文 [2, 定理 3.3], M 是 Gorenstein 投射模.

(5) \Rightarrow (6) 设 M 是无挠模, 则有 $M = \varinjlim M_i$, 这里每个 M_i 是有限生成无挠模. 由条件, M_i 是有限表现的 Gorenstein 投射模. 由文 [26, 命题 2.4] 及 [9, 命题 2.3], M_i 是 Gorenstein 平坦模. 从而由文 [13, 命题 2.1] 及 [12, 定理 1.5.7 及 43 页练习 4], M 是 Gorenstein 平坦模.

(6) \Rightarrow (4) 设 M 无挠模. 由条件, M 是 Gorenstein 平坦模. 从而由文 [13, 命题 2.1], M 余纯平坦模.

(4) \Rightarrow (7) 设 D 是可除模. 对所有 $0 \neq a \in R$, 记 $T = R/aR$. 由文 [28, 定理 9.5], $\text{Tor}_1^R(T, D^+) \cong \text{Ext}_R^1(T, D)^+ = 0$. 从而 D^+ 是无挠模. 由条件, D^+ 余纯平坦模, 则由引理 3.2 可得 D 余纯 FP- 内射模.

(8) \Rightarrow (2) 设 A 是 R 的理想. 显然 A 是无挠模. 注意 $\text{fd}_R K/R \leq 1$, 从而运用文 [23, 引理 2.3] 可得 $\text{Ext}_R^1(K/R, A^+) \cong \text{Tor}_1^R(A, K/R)^+ = 0$, 则序列 $\text{Hom}_R(K, A^+) \rightarrow \text{Hom}_R(R, A^+) \cong A^+ \rightarrow 0$ 是正合列. 对 R 的任何理想 $I \neq 0$, 取 $f \in \text{Hom}_R(R, \text{Hom}_R(K, A^+))$, 则对任何 $0 \neq a \in I$, 都有 $f(a) \in \text{Hom}_R(K, A^+)$. 由于 $\text{Hom}_R(K, A^+)$ 是可除模, 从而存在 $x_a \in \text{Hom}_R(K, A^+)$ 满足 $f(a) = ax_a$. 现在对任何 $x, y \in I - 0$ 及 $x \neq y$, 都存在 $z_x, z_y \in \text{Hom}_R(K, A^+)$, 使得 $f(xy) = xf(y) = yf(x) = xyz_x = yxz_y$ 成立, 则 $xy(z_x - z_y) = 0$. 由于 $\text{Hom}_R(K, A^+)$ 是无挠模, 故 $z_x = z_y$ 成立. 从而对任何 $a \in I$, 都存在 $x \in \text{Hom}_R(K, A^+)$ 满足 $f(a) = ax$. 现在定

义 $\varphi: R \rightarrow \text{Hom}_R(K, A^+)$, $\varphi(r) = rx$. 不难证明, 对任何 $a \in I$, 都有 $\varphi(a) = ax = f(a)$. 故 $\text{Hom}_R(K, A^+)$ 是内射模, 而 A^+ 则是 h -可除模. 由条件, A^+ 是余纯 FP- 内射模, 即是说, A^{++} 是余纯平坦模. 运用文 [12, 命题 5.3.7-5.3.9], 正合列 $0 \rightarrow A^+ \rightarrow A^{+++} \rightarrow A^{+++}/A^+ \rightarrow 0$ 是分裂的. 从而对任何内射 R - 模 E , 序列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^+) \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^{+++}) \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^{+++}/A^+) \rightarrow 0$$

是分裂的正合列, 且序列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^+) \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^{+++}) \rightarrow \text{Hom}_R(E, A^{+++}/A^+) \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, A^+) \\ \rightarrow \text{Ext}_R^1(E, A^{+++}) \cong (\text{Tor}_1^R(E, A^{+++}))^+ = 0 \end{aligned}$$

也是正合列. 故可由 $\text{Tor}_1^R(E, A)^+ \cong \text{Ext}_R^1(E, A^+) = 0$, 得到 $\text{Tor}_2^R(E, R/A) \cong \text{Tor}_1^R(E, A) = 0$. 故有 $\text{fd}_R E \leq 1$. 运用文 [15, 定理 3.8], 可得 $\text{cf} D(R) \leq 1$.

(2)+(7) \Rightarrow (9) 设 D 是可除模. 由条件, D 是余纯 FP- 内射模. 由引理 3.2, D^+ 余纯平坦模. 现设 $0 \rightarrow K_0 \rightarrow F_0 \rightarrow D^+ \rightarrow 0$ 是正合列, 这里 F_0 是平坦模; 设 E 是内射 R - 模, 则序列 $0 = \text{Tor}_1^R(E, D^+) \rightarrow E \otimes_R K_0 \rightarrow E \otimes_R F_0 \rightarrow E \otimes_R D^+ \rightarrow 0$ 是正合列. 对于 K_0 , 存在正合列 $0 \rightarrow K_1 \rightarrow F_1 \rightarrow K_0 \rightarrow 0$, 这里 F_1 是平坦模. 从而我们可得正合列 $\text{Tor}_1^R(E, K_0) \rightarrow E \otimes_R K_1 \rightarrow E \otimes_R F_1 \rightarrow E \otimes_R K_0 \rightarrow 0$. 注意, 由文 [25, 命题 3.3], $\text{fd}_R E \leq 1$ 成立, 从而可得 $\text{Tor}_1^R(E, K_0) \cong \text{Tor}_2^R(E, D^+)$. 由此重复上述过程, 我们可得两个正合列 $\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow D^+ \rightarrow 0$ 与 $\cdots \rightarrow E \otimes_R F_1 \rightarrow E \otimes_R F_0 \rightarrow E \otimes_R D^+ \rightarrow 0$. 由引理 3.1, R 是凝聚整环. 运用文 [12, 命题 6.5.1], D^+ 有平坦分解 $0 \rightarrow D^+ \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$. 由于 E^+ 是平坦模, 序列 $\cdots \rightarrow (E \otimes_R F^1)^+ \cong \text{Hom}_R(F^1, E^+) \rightarrow (E \otimes_R F^0)^+ \cong \text{Hom}_R(F^0, E^+) \rightarrow (E \otimes_R D^+)^+ \cong \text{Hom}_R(D^+, E^+) \rightarrow 0$ 是正合列. 从而序列 $0 \rightarrow E \otimes_R D^+ \rightarrow E \otimes_R F^0 \rightarrow E \otimes_R F^1 \rightarrow \cdots$ 也是正合列, 则存在平坦模的序列 $\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$ 满足 $D^+ \cong \text{Im}(F_0 \rightarrow F^0)$, 且对任何内射模 E ,

$$\cdots \rightarrow E \bigotimes_R F_1 \rightarrow E \bigotimes_R F_0 \rightarrow E \bigotimes_R F^0 \rightarrow E \bigotimes_R F^1 \rightarrow \cdots$$

也是正合列. 这就是说, D^+ 是 Gorenstein 平坦模. 由引理 3.2, D 是 Gorenstein FP- 内射模.

(10) \Rightarrow (6) 设 M 是无挠模. 从而 $M = \varinjlim K$, 这里 K 是有限生成无挠模, 则存在自由模 F 满足 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow 0$ 是正合列. 从而序列 $0 \rightarrow C^+ \rightarrow F^+ \rightarrow K^+ \rightarrow 0$ 是正合列, 且由于 F^+ 是内射模, K^+ 是 h -可除模. 由条件, K^+ 是 Gorenstein FP- 内射模, 则由引理 3.2 可得 K^{++} 是 Gorenstein 平坦模. 故存在平坦模的正合列 $\mathbf{F} = \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$ 满足 $K^{++} \cong \text{Im}(F_0 \rightarrow F^0)$. 故序列 $\mathbf{F}^+ = \cdots \rightarrow (F_1)^+ \rightarrow (F_0)^+ \rightarrow (F^0)^+ \rightarrow (F^1)^+ \rightarrow \cdots$ 是一个内射模的正合列, 且 $K^{+++} \cong \text{Im}((F^0)^+ \rightarrow (F_0)^+)$. 现设 N 是 FP- 内射模, 则对任何有限表现模 M , 由同构 $\text{Tor}_1^R(M, N^+) \cong \text{Ext}_R^1(M, N)^+ = 0$ 可得 N^+ 是平坦模. 注意序列 $\mathbf{F}^{++} = \cdots \rightarrow (F_1)^{++} \rightarrow (F_0)^{++} \rightarrow (F^0)^{++} \rightarrow (F^1)^{++} \rightarrow \cdots$ 是正合列, 则序列

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(N, \mathbf{F}^+)^+ &\cong N^+ \bigotimes_R \mathbf{F}^{++} = \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(N, (F_1)^+)^+ \cong N^+ \bigotimes_R (F_1)^{++} \rightarrow \text{Hom}_R(N, (F_0)^+)^+ \\ &\cong N^+ \bigotimes_R (F_0)^{++} \rightarrow \text{Hom}_R(N, (F^0)^+)^+ \cong N^+ \bigotimes_R (F^0)^{++} \rightarrow \text{Hom}_R(N, (F^1)^+)^+ \\ &\cong N^+ \bigotimes_R (F^1)^{++} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

也是正合列. 从而序列

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(N, \mathbf{F}^+) &= \cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_R(N, (F^1)^+) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(N, (F^0)^+) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}_R(N, (F_0)^+) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(N, (F_1)^+) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

是正合列. 因此 K^{+++} 是 Ding 内射模. 由文 [12, 命题 5.3.7–5.3.9], K^+ 是 K^{+++} 的直和加项. 由文 [34, 推论 2.9], K^+ 是 Ding 内射模, 自然也是 Gorenstein 内射模. 由文 [20, 定理 3.6], K 是 Gorenstein 平坦模. 由 (5) \Rightarrow (6) 的证明过程可知, M 是 Gorenstein 平坦模. 证毕.

文 [27, 推论 4.3] 表明, 整环 R 是 Gorenstein Dedekind 整环当且仅当 R 是 Noether 的 Gorenstein Prüfer 整环. 对此, 我们有如下推论:

推论 3.1 设 R 是整环. 以下陈述等价:

- (1) R 是 Gorenstein Dedekind 整环;
- (2) R 是 Noether 整环, 且每个有限生成无挠 R -模是余纯投射模;
- (3) R 是 Noether 整环, 且每个有限生成无挠 R -模是 Gorenstein 投射模.

4 一些例子

以如下例子结束本文. 我们知道, 平坦模是无挠模. 但余纯平坦模未必是无挠模.

例 4.1 构造二元多项式环 $R = \mathbb{Q}[x, y]$, 取 R -模 $M = R/(x, y)$, 则对任何平坦 R -模 N , 我们有 $\mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$, $\mathrm{Ext}_R^2(M, R) \cong \mathrm{Hom}_R(M, M) \neq 0$. 故 M 是余纯投射模, 而不是无挠模. 由文 [16, 命题 3.7] 可知, M 余纯平坦模.

虽然 Prüfer 整环, Gorenstein Prüfer 整环等整环都是凝聚环. 但并非每个整环都是凝聚环.

例 4.2 设 \mathbb{R} 是实数域, 构造环 $R = \mathbb{Z} + X\mathbb{R}[[X]]$, 则由文 [19, 定理 4.11], R 不是凝聚环. 一般地, 凝聚整环未必是 Gorenstein Prüfer 整环, 无挠模也未必是 Gorenstein 平坦模.

例 4.3 构造环 $R = \mathbb{Z}[x]$ 如文 [30, 例 2.2], 则由文 [30, 例 2.2], R 是凝聚环, 且 $cfD(R) \geq 2$. 由定理 3.3, R 不是 Gorenstein Prüfer 整环. 再次运用定理 3.3 可知, 存在无挠 R -模不是 Gorenstein 平坦模.

余纯 FP-内射 R -模未必是 FP-内射模.

例 4.4 构造环 $R = \mathbb{Q} + x^2\mathbb{Q}[x]$ 如例 4.6, 则由文 [27, 例 4.1], R 是 Gorenstein Prüfer 整环, 而不是 Prüfer 整环. 从而存在 h -可除模 C 不是 FP-内射模. 运用定理 3.3, C 是余纯 FP-内射模.

FP-内射 R -模未必是余纯内射模.

例 4.5 设 X 是 \mathbb{Q} 上的未定元, 取极大理想 $\mathfrak{m} = (X)$. 构造环 $R = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]_{\mathfrak{m}}$, 则 R 是 Prüfer 整环且 $\mathrm{gl.dim}(R) = 2$. 由文 [30, 定理 3.11], R 不是 Gorenstein Dedekind 整环. 从而由文 [29, 定理 2.4], 存在 h -可除 R -模 C 不是余纯内射模. 但 C 是 FP-内射模.

凝聚环 R 称为 FC 环是指 R 是 FP-内射 R -模 [7]. 文 [27, 定理 4.2] 证明了整环 R 是 Gorenstein Prüfer 整环当且仅当对 R 的每个主理想 $(u) \neq 0$, $R/(u)$ 是 FC 环. 下面我们将举例说明, 对 Gorenstein Prüfer 整环的非平凡的真理想 I , 其商环 R/I 却未必是 FC 环.

例 4.6 构造 $R = \mathbb{Q} + x^2\mathbb{Q}[x]$, 则 $cfD(R) \leq 1$ 成立. 由定理 3.3, R 是 Gorenstein Prüfer 整环. 设 $I = (x^4, x^5)$. 显然, I 是 R 的非平凡真理想, 则其商环 $\bar{R} = R/I$ 是局部 Artin 环,

$\mathfrak{m} = (x^2, x^3)$ 是其极大理想. 注意到 $\mathfrak{m}^2 = 0$ 成立, 则 \overline{R} 不是 QF 环. 又因为 \overline{R} 是 Noether 环, 故 \overline{R} 不是 FC 环.

参 考 文 献

- [1] Bazzoni S., Salce L., Almost perfect domains, *Colloq. Math.*, 2003, **95**(2): 285–301.
- [2] Bennis D., A note on Gorenstein flat dimensions, *Algebra Colloq.*, 2011, **18**(1): 155–161.
- [3] Bennis D., Mahdou N., Global Gorenstein dimensions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, **138**(2): 461–465.
- [4] Bennis D., Weak Gorenstein Global dimensions, *International Electronic J. Algebra*, 2010, **8**: 140–152.
- [5] Colly R. R., Rings which have flat injective modules, *J. Algebra*, 1975, **35**: 239–252.
- [6] Chase S. U., Direct products of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, **97**: 457–473.
- [7] Ding N. Q., Chen J. L., Coherent rings with finite self-FP-injective dimension, *Comm. Algebra*, 1996, **24**(9): 2963–2980.
- [8] Ding N. Q., Chen J. L., On copure flat modules and flat resolvents, *Comm. Algebra*, 1996, **24**(3): 1071–1081.
- [9] Ding N. Q., Li Y. L., Mao L. X., Strongly Gorenstein flat modules, *J. Aust. Math. Soc.*, 2009, **86**: 323–338.
- [10] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Copure injective resolutions, flat resolvents and dimensions, *Comment Math. Univ. Carolin.*, 1993, **34**(2): 203–211.
- [11] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.*, 1995, **220**(4): 611–633.
- [12] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Relative Homological Algebra, Walter de Gruyter Exp. Math., Vol. 30, Berlin, New York, 2000.
- [13] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Lopez-ramos J. A., The existence of Gorenstein flat covers, *Math. SCAND.*, 2004, **94**: 46–62.
- [14] Faith C., Walker E. A., Direct-sum representations of injective modules, *J. Algebra*, 1967, **5**: 203–221.
- [15] Fu X. H., Ding N. Q., On strongly copure flat modules and copure flat dimensions, *Comm. Algebra*, 2010, **38**: 4531–4544.
- [16] Fu X. H., Zhu H. Y., Ding N. Q., On Copure Projective modules and Copure Projective Dimensions, *Comm. Algebra*, 2012, **40**: 343–359.
- [17] Fuchs L., Lee S. B., Weak-injectivity and almost perfect domains, *J. Algebra*, 2009, **321**(1): 18–27.
- [18] Gao Z. H., Wang F. G., All Gorenstein hereditary rings are coherent, *J. Pure Appl. Algebra*, 2014, **13**: 1350140-1–1350140-5.
- [19] Gabelli S., Houston E., Coherentlike conditions in pullbacks, *Michigan Math. J.*, 1997, **44**(1): 99–123.
- [20] Holm H., Gorenstein homological dimensions, *J. Pure Appl. Algebra*, 2004, **189**(1–3): 167–193.
- [21] Hamsher R., On the structure of a one dimensional quotient field, *J. Algebra*, 1971, **19**: 416–425.
- [22] Lee S. B., h -divisible modules, *Comm. Algebra*, 2003, **31**: 513–525.
- [23] Lee S. B., Weak-injective modules, *Comm. Algebra*, 2006, **34**: 361–370.
- [24] Mao L. X., Ding N. Q., Relative copure injective modules and copure flat modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 2007, **208**: 635–646.
- [25] Mahdou N., Tamekkante M., On (strongly) Gorenstein (semi)hereditary rings, *Arab J. Sci. Eng.*, 2011, **36**: 431–440.
- [26] Mahdou N., Tamekkante M., Strongly Gorenstein flat modules and dimensions, *Chin. Ann. Math.*, 2011, **32B**(4): 533–548.
- [27] Qiao L., Wang F. G., A Gorenstein analogue of a result of Bertin, *J. Pure Appl. Algebra*, 2015, **14**(2): 1550019-1–1550019-13.
- [28] Rotman J. J., An Introduction to Homological Algebra, New York: Academic Press, 1979.
- [29] Xiong T., A characterization of Gorenstein Dedekind domains, *International Electronic J. Algebra*, 2017, **22**: 97–102.
- [30] Xiong T., Gorenstein semihereditary rings and Gorenstein Prüfer domains, *International Electronic J. Algebra*, 2017, **22**: 45–61.
- [31] Xiong T., Rings of copure projective dimension one, *J. Korean Math. Soc.*, 2017, **54**(2): 427–440.
- [32] Xiong T., Wang F. G., Hu K., Xia G. L., et al., The Change of Rings for Copure Flat Dimensions, *Journal of Heilongjiang University (Natural Science)*, 2016, **33**(4): 435–437.
- [33] Xiong T., Wang F. G., Hu K., Copure Projective Modules and CPH-rings, *Journal of Sichuan Normal University*, 2013, **36**(2): 198–201.
- [34] Journal of Sichuan Normal University Yang G., Liu Z. K., Liang L., Ding projective and Ding injective modules, *Algebra Colloq.*, 2013, **20**(4): 601–612.