第62卷第2期 数学学报中文版 Vol.62, No.2
2019年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Mar., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)02-0331-14 **文献标识码:** A

Gorenstein 正则环、奇点范畴和 Ding 模

汪军鹏

西北师范大学经济学院 兰州 730070
E-mail: wangjunpeng1218@163.com

狄振兴

西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070
E-mail: dizhenxing19841111@163.com

摘　要　本文证明了任意环的整体 Ding 投射维数和整体 Ding 内射维数一致, 研究了奇点范畴和相对于 Ding 模的稳定范畴间的关系, 并刻画了 Gorenstein (正则) 环以及环的整体维数的有限性.

关键词　Gorenstein 正则环; Ding 投射模; 奇点范畴
MR(2010) 主题分类　16E65, 18G25, 18E30
中图分类　O154.2

Gorenstein Regular Rings, Singularity Categories and Ding Modules

Jun Peng WANG

Department of Economics, Northwest Normal University,
Lanzhou 730070*, P. R. China*
E-mail: *wangjunpeng*1218*@*163*.com*

Zhen Xing DI

Department of Mathematics, Northwest Normal University,
Lanzhou 730070*, P. R. China*
E-mail: *dizhenxing*19841111*@*163*.com*

Abstract　We prove that the global Ding projective dimension and global Ding injective dimension coincide for any ring. We investigate the relationship between singularity categories and stable categories with respect to Ding modules, and characterize Gorenstein (regular) rings and the finiteness of left global dimension of rings in terms of singularity categories and Ding modules.

Keywords　Gorenstein regular ring; Ding projective module; singularity category
MR(2010) Subject Classification　16E65, 18G25, 18E30
Chinese Library Classification　O154.2

收稿日期: 2018-09-03; 接受日期: 2018-09-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11601433); 中国博士后自然科学基金资助项目 (2106M602945XB)

1 引言和主要结论

在经典的同调代中, 对于任意环 R, 所有左 R-模投射维数和内射维数的上确界相等, 称该相等的值为 R 的左整体维数, 并记为 $\mathrm{l.gl.dim}(R)$. 根据 Auslander 定理 (见文 [18, 推论 5.51]), $\mathrm{l.gl.dim}(R)$ 有如下刻画

$$\mathrm{l.D}(R)=\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\,|\,M \text{ 是有限生成的左 } R\text{-模}\}.$$

作为投射维数和内射维数的相对版本, Gorenstein 投射维数和 Gorenstein 内射维数受到许多学者的关注 [3, 4, 8, 11, 15, 16]. 通过总结 Gorenstein 同调代数中的一些重要结论, Holm [15] 断言 "经典同调代数中的结果在 Gorenstein 同调代数中应有其相应的版本." 在这一断言的指引下, Bennis, Mahdou 在文 [4, 定理 1.1] 和 Emmanouil 在文 [8, 定理 4.1] 中运用不同的方法, 在任意环 R 上, 证明了如下等式

$$\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\}=\sup\{\mathrm{Gid}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\},$$

其中 $\mathrm{Gpd}_R(M)$ ($\mathrm{Gid}_R(M)$) 表示 M 的 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射) 维数. 称该相同的值为环 R 的左 Gorenstein 整体维数, 并记为 $\mathrm{l.G\text{-}gl.dim}(R)$. 对于任意交换环 R, Bennis 等学者 [3] 得到了 Gorenstein 版本的 Auslander 定理, 即

$$\mathrm{l.G\text{-}gl.dim}(R)=\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M)\,|\,M \text{ 是有限生成的左 } R\text{-模}\}.$$

Ding 投射模和 Ding 内射模是由 Ding 等学者在文 [7, 12, 19] 中引入的. 根据定义, 显然每个 Ding 投射 (Ding 内射) 模是 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射) 的. 但是, 该包含关系是否为严格的目前尚未可知. Yang 等学者研究了环和模的 Ding 投射维数和 Ding 内射维数, 见文 [23, 24, 26] 等. 由文 [24, 定理 3.12] 和 [23, 定理 3.11] 可知, 当 R 是 Ding–Chen 环或交换凝聚环时, 存在如下等式

$$\sup\{\mathrm{Dpd}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\}=\sup\{\mathrm{Did}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\}.$$

这里, $\mathrm{Dpd}_R(M)$ ($\mathrm{Did}_R(M)$) 表示 M 的 Ding 投射 (Ding 内射) 维数.

本文的第一个写作动机是在任意环上考虑上述 Ding 维数的等式. 针对 Gorenstein 模类和 Ding 模类的包含关系是否为严格的, 我们证明了当环 R 的左 Gorenstein 整体维数有限时, 每个 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射) 左 R-模是 Ding 投射 (Ding 内射) 的. 作为应用, 我们得到了任意环上所期望的 Ding 维数等式和 Ding 版本的 Auslander 定理.

定理 1.1 (= 定理 3.5 和推论 3.6) 设 R 是环, 则

$$\begin{aligned}\sup\{\mathrm{Dpd}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\}&=\sup\{\mathrm{Did}_R(M)\,|\,M \text{ 是左 } R\text{-模}\}\\&=\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M)\,|\,M \text{ 是有限生成左 } R\text{-模}\}.\end{aligned}$$

2000 年, Beligiannis [2] 称环 R 是左 Gorenstein 环, 如果所有内射左 R-模具有有限的投射维数并且所有投射左 R-模具有有限的内射维数. 由文 [2, 定理 6.9] 和 [8, 定理 4.1] 可知, 左 Gorenstein 环即左 Gorenstein 整体维数有限的环. 后来, Enochs 等学者 [10] 将左 Gorenstein 环重新命名为左 Gorenstein 正则环. 注意到许多 Gorenstein 环上的著名结论在左 Gorenstein 正则环上仍然成立 [2, 6, 10], 从而左 Gorenstein 正则环可视为非 Noether 的 Gorenstein 环.

设 R 是环. 分别记 R-Mod 和 R-mod 为所有左 R-模和所有有限生成左 R-模构成的范畴, 分别记 $\mathscr{GP}$ 和 $\mathscr{G}p$ 为由所有 Gorenstein 投射左 R-模和所有有限生成的 Gorenstein 投射左 R-模

构成的 R-Mod 和 R-mod 的子范畴. 众所周知, R-Mod 是 abelian 范畴, R-mod 是 abelian 范畴当且仅当 R 是左 Noether 环; 在任意环 (左 Noether 环) R 上, 子范畴 $\mathscr{GP}$ ($\mathscr{G}p$) 按照通常的正合结构构成一个 Frobenius 范畴, 其投射-内射对象就是 (有限生成的) 投射左 R-模. 因此, 稳定范畴 $\underline{\mathscr{GP}}$ ($\underline{\mathscr{G}p}$) 是三角范畴 [13]. 对偶地, 相对于 Gorenstein 内射左 R-模的稳定范畴 $\underline{\mathscr{GI}}$ 是三角范畴.

1987 年, Buchweitz [5] 首次在双边 Noether 环上研究了 Verdier 商三角范畴

$$\mathbf{D}_{sg}(R) := \mathbf{D}^b(R\text{-mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-proj}),$$

并命名为 "稳定导出范畴", 其中 $\mathbf{D}^b(R\text{-mod})$ 表示 R-mod 的导出范畴, $\mathrm{K}^b(R\text{-proj})$ 表示有限生成投射左 R-模的有界同伦范畴. 特别地, 作者在文 [5, 定理 4.1] 中证明了, 当 R 是 Gorenstein 环时存在以下三角等价:

$$\underline{\mathscr{G}p} \simeq \mathbf{D}_{sg}(R).$$

该结论被称为 Buchweitz 定理, 说明 $\mathbf{D}_{sg}(R)$ 在 Gorenstein 环上是代数的三角范畴. 同时, 作者还利用 $\mathbf{D}_{sg}(R)$ 研究了 Noether 环的稳定同调性质并定义了 Gorenstein 环上的 Tate 上同调. 在有限维代数表示论领域, 这一商三角范畴最早出现在 Rickard 的工作 [21] 中, 作者证明了该商三角范畴三角等价于自内射代数的稳定模范畴. 接着, Happel [14] 利用 (余) 倾斜理论将这一结果推广到 Gorenstein artin 代数的情形. 后来, Orlov [20] 重新考虑了上述商三角范畴, 由于能反映环 R 的某些同调奇点性质, 作者将 $\mathbf{D}_{sg}(R)$ 重新命名为环 R 的奇点范畴.

在文 [2] 中, 对任意环 R, Beligiannis 引入并研究了 Verdier 商三角范畴

$$\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) \quad \text{和} \quad \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}),$$

其中 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 表示 R-Mod 的导出范畴, $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ ($\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})$) 表示投射 (内射) 左 R-模的有界同伦范畴. 特别地, 文 [2, 定理 6.9] 中证明了 R 是左 Gorenstein 正则环当且仅当存在三角等价

$$\underline{\mathscr{GP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) \quad (\text{或 } \underline{\mathscr{GI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})).$$

该结论首次将 Buchweitz 定理扩展到大模范畴的情形, 并给出了逆. 最近, Zhang [27] 运用不同的方法得到了, 存在三角等价 $\underline{\mathscr{GP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 当且仅当对于任意的左 R-模 M, $\mathrm{Gpd}_R(M) < \infty$ (因此当且仅当 R 是左 Gorenstein 正则环).

注意到 $\mathscr{DP}$ ($\mathscr{DI}$), 由所有 Ding 投射 (Ding 内射) 左 R-模构成的子范畴, 按照通常的正合结构亦构成 Frobenius 范畴, 其投射-内射对象就是投射左 R-模 (见引理 4.1). 因此, 稳定范畴 $\underline{\mathscr{DP}}$ ($\underline{\mathscr{DI}}$) 是三角范畴. 鉴于以上讨论, 作为本文的第二个写作动机, 考虑如下问题:

问题 1.2 怎样的环上具有三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) \quad \text{或} \quad \underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})?$$

我们的第二个主要结论彻底解决了问题 1.2. 注意到我们的方法不同于文 [2, 定理 6.9] 和 [27, 定理 8.1.2].

定理 1.3 (= 推论 4.20) 设 R 是环, 则以下条件等价:

(1) R 是左 Gorenstein 正则环.

(2) 对于任意的左 R-模 M, $\mathrm{Dpd}_R(M) < \infty$.

(3) 对于任意的左 R-模 M, $\mathrm{Did}_R(M) < \infty$.

(4) $\sup\{\mathrm{Dpd}_R(M) \,|\, M$ 是左 R-模$\} = \sup\{\mathrm{Did}_R(M) \,|\, M$ 是左 R-模$\} < \infty$.

(5) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

(6) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}).$$

由文 [1, 引言, p.123] (或 [27, 命题 5.4.1]) 可知, 一个环 R 是光滑的 (即 $\mathrm{l.gl.dim}(R) < \infty$) 当且仅当商三角范畴 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 为零. 从该结论可以看出, $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 能够测量环 R 的光滑性. 作为定理 1.3 的一个应用, 如下推论重新得到了这一事实.

推论 1.4 (= 推论 4.21) 设 R 是环, 则以下条件等价:

(1) R 是光滑的, 即 $\mathrm{l.gl.dim}(R) < \infty$.

(2) R 是左 Gorenstein 正则环且 $\mathscr{DP} = \mathscr{P}$.

(3) R 是左 Gorenstein 正则环且 $\mathscr{DI} = \mathscr{I}$.

(4) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) = 0$.

(5) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}) = 0$.

称 R 是 Gorenstein 环 [17], 如果存在某个非负整数 n, 使得 R 是 n-Gorenstein 环, 即 R 是双边 Noether 环, 并且 R 的双边自内射维数均不超过 n. 定理 1.3 的另一个应用是如下 Gorenstein 环的一些刻画.

推论 1.5 (= 推论 4.22) 设 R 是双边 Noether 环, 则以下条件等价:

(1) R 是 Gorenstein 环.

(2) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

(3) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}).$$

2 预备知识

贯穿全文, R 表示具有单位元的结合环而所有的左、右 R-模都是酉模. 除非特别声明, 所有的 (R-) 模均是指左 R-模. 我们用 R-Mod 表示左 R-模的范畴. 用 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 表示 R-Mod 的导出范畴. 用 $\mathscr{P}$, $\mathscr{I}$, $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{FI}$ 分别表示由所有投射、内射、平坦以及 FP-内射的 R-模构成的子范畴 (贯穿下文, 子范畴均指对同构封闭的全加法子范畴). 用 $\mathrm{pd}_R(M)(\mathrm{id}_R(M), \mathrm{fd}_R(M), \text{FP-id}_R(M))$ 表示 R-模 M 的投射、内射、平坦和 FP-内射维数. 用 $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ ($\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})$) 表示投射 (内射) R-模的有界同伦范畴.

2.1 复形

一个 R-模构成的复形

$$\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{\delta_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{\delta_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{\delta_X^{n+1}} \cdots$$

简记为 X. 一个复形同态 $f: X \to Y$ 是指一簇模同态 $f = (f^n: X^n \to Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $\delta_Y^n f^n = f^{n-1}\delta_X^n$. 记所有 ($R$-模的) 复形构成的范畴为 $\mathrm{Ch}(R)$. 复形 X 的第 n 个循环和第 n 个同调分别定义为 $\mathrm{Ker}(\delta_X^n)$ 和 $\mathrm{Ker}(\delta_X^n)/\mathrm{Im}(\delta_X^{n-1})$, 并分别记之为 $\mathrm{Z}^n(X)$ 和 $\mathrm{H}^n(X)$). 称一个复形 X 是正合 (或零调) 的, 如果每个 $\mathrm{H}^n(X) = 0$. 称复形同态 $f: X \to Y$ 是拟同构, 如果每个 $\mathrm{H}^n(f): h^n(X) \to h^n(Y)$ 是同构. 称复形 X 是 DG-投射的, 如果每个 X^n 是投射模, 并且对任意的拟同构 $g: Y \to Z$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(X,g): \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(R)}(X,Z)$ 是 abelian 群复形间的拟同构. 对偶地, 可以定义 DG-内射复形.

记 $\sup X = \sup\{l \in \mathbb{Z} \,|\, X^l \neq 0\}$, $\inf X = \inf\{l \in \mathbb{Z} \,|\, X^l \neq 0\}$. 称 X 是上有界 (下有界, 有界) 的, 如果 $\sup X < \infty$ ($\inf X > -\infty$, $\sup X < \infty$ 且 $\inf X > -\infty$). 称 X 是同调有界的, 如果 $\mathrm{H}(C)$ 是有界的. 设 $M \in R$-Mod. 我们总是将 M 视为复形 $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots$, 其中 M 位于第 0 层次, 其它层次均为 0. 设 k, m 是整数, 则复形 X 在 k 处和 m 处的右、左硬切割分别是指以下两个复形:

$$X_{\sqsupset_k}: \cdots \to X^{k-2} \xrightarrow{\delta_X^{k-2}} X^{k-1} \xrightarrow{\delta_X^{k-1}} X^k \to 0 \to \cdots,$$

$$X_{\sqsubset_m}: \cdots \to 0 \longrightarrow X^m \xrightarrow{\delta_X^m} X^{m-1} \xrightarrow{\delta_X^{m+1}} X^{m+2} \to \cdots.$$

用 $X[1]$ 表示如下复形: 其第 i 层次的模为 $(X[1])^i = X^{i+1}$, 边缘算子为 $\delta_{X[1]}^i = -\delta_X^{i+1}$. 由归纳法, $X[n] = (X[n-1])[1]$.

2.2 模的 Ding 投射维数

称 R-模 M 是 Ding 投射 [7, 12] (Gorenstein 投射 [9]) 的, 如果存在一个由投射 R-模构成的 $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{F})$-正合 ($\mathrm{Hom}(-,\mathscr{P})$-正合) 的正合复形

$$P = \cdots \to P^{-1} \to^0 \to P^1 \to P^2 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P^0 \to P^1)$. 并称复形 P 为投射模的 $\mathscr{F}$-全零调复形 (投射模的全零调复形). 对偶地可以定义 Ding 内射 [9] (Gorenstein 内射 [12, 19]) 模和内射模的 $\mathscr{F}\mathscr{I}$-全零调复形 (内射模的全零调复形).

设 $N \in R$-Mod. 定义 N 的 Ding 投射维数, 记 $\mathrm{Dpd}_R(N)$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dpd}_R(N) = \inf\{m \in \mathbb{N} \,|\, &\text{存在正合复形 } 0 \to X^{-m} \to \cdots \to X^{-1} \to X^0 \to N \to 0,\\ &\text{其中每个 } X^i \in \mathscr{D}\mathscr{P}\}.\end{aligned}$$

若不存在上述正合复形, 则记 $\mathrm{Dpd}_R(B) = \infty$. 对偶地可以定义 N 的 Ding 内射维数, $\mathrm{Did}_R(N)$. 类似地, 我们可以定义 N 的 Gorenstein 投射维数 (Gorenstein 内射维数), $\mathrm{Gpd}_R(N)$ ($\mathrm{Gid}_R(N)$).

2.3 复形的 Ding 投射维数

2016 年, Wang 和 Liu [22] 定义并研究了复形的强 Gorenstein 平坦维数, 注意到强 Gorenstein 平坦模被重新命名为 Ding 投射模 [7, 12], 我们将复形的强 Gorenstein 平坦维数重新命名为复形的 Ding 投射维数.

定义 2.6 设 X 是复形.

(1) X 的一个 $\mathscr{F}$-完全分解是指复形同态的图

$$T \xrightarrow{\tau} P \xrightarrow{\pi} X,$$

其中 $\pi: P \to X$ 是拟同构, P 是 DG-投射复形, T 是投射模的 $\mathscr{F}$-全零调复形, 并且当 $i \ll 0$ 时 $\tau^i: T^i \to P^i$ 是同构.

(2) 若存在 X 的 $\mathscr{F}$-完全分解, 则称 X 具有有限的 Ding 投射维数, 记为 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X) < \infty$, 其中 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X)$ 的定义如下:

$$\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X) = \inf\{m \in \mathbb{Z} \mid T \xrightarrow{\tau} P \xrightarrow{\pi} X \text{ 是 } \mathscr{F}\text{-完全分解, 并且对任意的 } i \leq m,\ \tau^i: T^i \to P^i \text{ 是同构}\}.$$

若不存在 X 的 $\mathscr{F}$- 完全分解, 则称 X 具有无限的 Ding 投射维数, 记为 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X) = \infty$.

对偶地, 可以定义复形的 Ding 内射维数.

如下关于复形 Ding 投射维数的事实将在第 4 节用到. 注意到相应复形的 Ding 内射维数的对偶结论亦成立.

引理 2.7 设 X, Y 和 Z 是复形.

(1) 对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X[k]) = \mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X) + k$ (见文 [22, 注记 2.13 (3)]).

(2) 设 M 是 R-模, 则 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(M) = \mathrm{Dpd}_R(M)$ (见文 [22, 推论 2.15]).

(3) 设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是复形的短正合序列. 若 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X)$, $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(Y)$ 和 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(Z)$ 中任意两个为有限值, 则第三个亦为有限值 (见文 [22, 命题 2.17]).

3 任意环的左整体 Ding 投射 (Ding 内射) 维数

等式

$$\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\} = \sup\{\mathrm{Gid}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}$$

反映了投射模和内射模间的某种平衡性质; Auslander 定理给出了有限生成模和所有模之间的一种联系. Bennis 等学者在文 [3, 4, 8] 中研究了 Gorenstein 模类的对应性质. 本节讨论 Ding 模类的对应性质.

由文 [4, 定理 1.1] 或 [8, 定理 4.1] 可知, 任意环 R 的左整体 Gorenstein 投射维数和左整体 Gorenstein 内射维数相等, 即存在等式

$$\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\} = \sup\{\mathrm{Gid}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\}.$$

该相同的值称为 R 的左 Gorenstein 整体维数, 记为 $\mathrm{l.G\text{-}gl.dim}(R)$. 下述定义引自文 [2, 定理 6.9], [10, 定义 2.1 和命题 2.2] 和 [8, 定理 4.1], 说明 Gorenstein 正则环与该维数有紧密的联系.

定义 3.8 称 R 是左 Gorenstein 正则环, 如果 R 满足如下的等价条件之一:

(1) $\mathrm{l.gl.GP.dim}(R) = \sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\} < \infty$.

(2) $\mathrm{l.gl.GI.dim}(R) = \sup\{\mathrm{Gid}_R(M) \mid M \text{ 是 } R\text{-模}\} < \infty$.

(3) 对任意的 R-模 M, 都有 $\mathrm{Gpd}_R(M) < \infty$.

(4) 对任意的 R-模 M, 都有 $\mathrm{Gid}_R(M) < \infty$.

(5) $\mathrm{l.G\text{-}gl.dim}(R) = \mathrm{l.gl.GP.dim}(R) = \mathrm{l.gl.GI.dim}(R) < \infty$.

(6) 存在非负整数 m, 使得 $\mathrm{l.G\text{-}gl.dim}(R) \leq m$.

左 Gorenstein 正则环具有如下性质, 其意义平行于 Gorenstein 环的相应性质 (请见文 [11, 定理 9.1.10]).

引理 3.9 设 R 是满足 l.G-gl.dim $(R) \leq m$ 的左 Gorenstein 正则环, 则对任意的 R-模 M, 以下条件等价:

(1) $\mathrm{fd}_R(M) < \infty$.

(2) $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$.

(3) $\mathrm{id}_R(M) < \infty$.

(4) FP-$\mathrm{id}_R(M) < \infty$.

而且, 以上所有维数不超过 m.

证明 由文 [8, 推论 4.3] 可知 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3), 并且这些维数不超过 m.

(3)$\Rightarrow$(4) 显然.

(4)$\Rightarrow$(3) 设 A 是 FP-内射 R-模, 则存在 R-模的纯短正合序列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 I 是内射的. 由 (1)$\Leftrightarrow$(3) 可知 $\mathrm{fd}_R(I) < \infty$. 从而由该短正合序列的纯性可知 $\mathrm{fd}_R(A) < \infty$. 进而再由 (1)$\Leftrightarrow$(3) 可知 $\mathrm{id}_R(A) < \infty$. 证毕.

易知如下事实.

引理 3.10 设 R 是环. 若每个平坦 R-模具有有限的投射维数, 则 $\mathscr{DP} = \mathscr{GP}$. 对偶地, 若每个 FP-内射 R-模具有有限的内射维数, 则 $\mathscr{DI} = \mathscr{GI}$.

由引理 3.9 和引理 3.10 可直接得到:

命题 3.11 设 R 是左 Gorenstein 正则环, 则存在等式 $\mathscr{DP} = \mathscr{GP}$ 及 $\mathscr{DI} = \mathscr{GI}$.

下述定理是本节主要结论, 在一些特殊环上的结果见文 [24, 定理 3.12] 和 [23, 定理 3.11].

定理 3.12 设 R 是环, 则存在以下维数的等式:

$$\sup\{\mathrm{Dpd}_R(M) \,|\, M \text{ 是 } R\text{-模}\} = \sup\{\mathrm{Did}_R(M) \,|\, M \text{ 是 } R\text{-模}\} = \text{l.G-gl.dim}(R).$$

证明 记

$$\text{l.gl.DP.dim}(R) = \sup\{\mathrm{Dpd}_R(M) \,|\, M \text{ 是 } R\text{-模}\},$$
$$\text{l.gl.DI.dim}(R) = \sup\{\mathrm{Gid}_R(M) \,|\, M \text{ 是 } R\text{-模}\},$$

并保持定义 3.8 中 l.gl.GP.dim(R) and l.gl.GP.dim(R) 的记号. 设 m 是任一非负整数, 只需证明

$$\text{l.gl.DP.dim}(R) \leq m \Leftrightarrow \text{l.gl.GP.dim}(R) \leq m \Leftrightarrow \text{l.gl.DI.dim}(R) \leq m.$$

注意到必要性和充分性的证明类似, 故只证必要性. 设 l.gl.DP.dim$(R) \leq m$, 则显然有

$$\text{l.gl.GP.dim}(R) \leq m.$$

因此, 由定义 3.8 和引理 3.10 可知, 如下 (不) 等式

$$\text{l.gl.GP.dim}(R) = \text{l.gl.GI.dim}(R) = \text{l.gl.DI.dim}(R) \leq m$$

成立. 证毕.

记相同的维数值 l.gl.DP.dim(R) = l.gl.DI.dim(R) 为 l.D-gl.dim(R), 并称之为 R 的左 Ding 整体维数. 定理 3.12 说明任意环的左 Ding 整体维数和左 Gorenstein 整体维数相等.

Bennis 等人在文 [3, 定理 1.1] 中证明了 Auslander 定理的 Gorenstein 版本, 即在任意交换环 R 上都存在如下等式

$$\begin{aligned}\text{l.G-gl.dim}(R) &= \sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \,|\, M \text{ 是有限生成的 } R\text{-模}\} \\ &= \sup\{\mathrm{Gpd}_R(R/I) \,|\, I \text{ 是 } R \text{ 的左理想}\}.\end{aligned}$$

下面给出 Auslander 定理的 Ding 版本.

推论 3.13 设 R 是环, 则如下维数相等:

(1) l.D-gl.dim(R)

(2) $\sup\{\mathrm{Dpd}_R(M)\,|\,M$ 是有限生成的 R -模$\}$.

(3) $\sup\{\mathrm{Dpd}_R(R/I)\,|\,I$ 是 R 的左理想$\}$.

证明 显然有 (1) $\geq$ (2) $\geq$ (3). 由文 [3, 定理 1.1] 可知, 对任意交换环 R, 都有

$$\text{l.G-gl.dim}(R)=\sup\{\mathrm{Gpd}_R(R/I)\,|\,I \text{ 是 } R \text{ 的左理想}\}.$$

但仔细阅读文 [3, 定理 1.1] 的证明发现以上等式对任意环都成立. 显然有

$$\sup\{\mathrm{Dpd}_R(R/I)\,|\,I \text{ 是 } R \text{ 的左理想}\}\geq\sup\{\mathrm{Gpd}_R(R/I)\,|\,I \text{ 是 } R \text{ 的左理想}\}.$$

所以由文 [3, 定理 1.1] 及定理 3.12 可知 (3) $\geq$ (1). 证毕.

Gorenstein 正则环与 K(R-GProj) (K(R-GInj), K(R-Proj), K(R-Inj)), 即 Gorenstein 投射 (Gorenstein 内射, 投射, 内射) R-模的无界同伦范畴, 密切相关. 由 Chen 的工作文 [6, 定理 A] 可知, 对任意左 Gorenstein 正则环 R, 存在三角等价 K(R-GProj) $\simeq$ K(R-GInj), 并且存在限制的三角等价 K(R-Proj) $\simeq$ K(R-Inj).

作为命题 3.11 的一个应用, 如下注记给出这些三角等价的 Ding 版本.

注记 3.14 记 K(R-DProj) (K(R-DInj)) 为 Ding 投射 (Ding 内射) R-模的无界同伦范畴. 由文 [6, 定理 A] 和命题 3.11 可知, 对任意左 Gorenstein 正则环 R, 存在三角等价 K(R-DProj) $\simeq$ K(R-DInj), 并且存在限制的三角等价 K(R-Proj) $\simeq$ K(R-Inj).

4 奇点范畴与相对于 Ding 模的稳定范畴

本节研究奇点范畴与相对于 Ding 模的稳定范畴间的关系. 特别地, 我们彻底回答了引言中问题 1.2 (见推论 4.20). 作为应用, 刻画了 Gorenstein (正则) 环以及环的整体维数的有限性 (见推论 4.21 和推论 4.22).

称 $\mathscr{A}$ 是 Frobenius 范畴, 如果 $\mathscr{A}$ 是具有足够的投射对象和足够的内射对象的正合范畴, 并且投射对象和内射对象一致. 由文 [13] 可知, 对任意的 Frobenius 范畴 $\mathscr{A}$, 其稳定范畴 $\underline{\mathscr{A}}$ 是三角范畴. 众所周知, 对任意环 R, 子范畴 $\mathscr{GP}$ 按照通常的正合结构 (即每一项均属于 $\mathscr{GP}$ 的 R-模构成的短正合序列) 形成 Frobenius 范畴, 其投射-内射对象即所有投射 R-模. 因此, 该 Frobenius 范畴的稳定范畴 $\underline{\mathscr{GP}}$ 是三角范畴.

如下引理讨论子范畴 $\mathscr{DP}$ 的对应性质.

引理 4.15 设 R 是环, 则 R-Mod 的全子范畴 $\mathscr{DP}$ 形成 Frobenius 范畴, 其投射-内射对象即所有投射 R-模. 特别地, $\mathscr{DP}$ 的稳定范畴 $\underline{\mathscr{DP}}$ 是三角范畴.

证明 由文 [25, 引理 2.4] 可知 $\mathscr{DP}$ 对扩张封闭. 因此, $\mathscr{DP}$ 形成一个正合范畴, 其正合结构就是通常的正合结构 (即每一项均属于 $\mathscr{DP}$ 的 R-模构成的短正合序列).

注意到对任意的 $D\in\mathscr{DP}$ 和 $P\in\mathscr{P}$, $\mathrm{Ext}_R^1(P,D)=0=\mathrm{Ext}_R^1(D,P)$, 其中后一个等式见文 [7, 引理 2.4]. 这些等式说明 $\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{DP}$ 中既是投射的又是内射的. 根据定义, 存在 R-模的短正合序列 $0\to D'\to Q'\to D\to 0$ 和 $0\to D\to Q''\to D''\to 0$, 其中 $Q',Q''\in\mathscr{P}$, $D',D''\in\mathscr{DP}$. 因此, 正合范畴 $\mathscr{DP}$ 具有足够的投射对象和足够的内射对象.

根据第二段的论述, 容易验证 $\mathscr{DP}$ 中投射对象类和内射对象类一致, 均为 $\mathscr{P}$. 证毕.

定理 4.18 的证明中需要以下引理, 这里, $\mathrm{K}^b(R\text{-Flat})$ 表示平坦 R-模的有界同伦范畴.

引理 4.16 设 R 是环, M 是 Ding 投射 R-模.

(1) 若 $\mathrm{K}^b(R\text{-Flat})$ 中复形 P 满足对任意的 $i \geq 0$, 有 $P^i = 0$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P) = 0$.

(2) 若 $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中复形 P 满足对任意的 $i \leq 0$, 有 $P^i = 0$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(P, M) = 0$.

证明 只证明结论 (1) (结论 (2) 可以类似证得). 首先由文 [7, 引理 2.4] 可知对任意平坦 R-模 L 以及任意正整数 m, 都有 $\mathrm{Ext}_R^m(M, L) = 0$. 考虑 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中的好三角

$$P_{\sqsupset_{-2}} \to P \to P_{\sqsubset_{-1}} \to P_{\sqsupset_{-2}}[1].$$

运用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, -)$ 作用于该好三角, 可得以下正合序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P_{\sqsupset_{-2}}[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P_{\sqsubset_{-1}}[m]).$$

注意到 $P_{\sqsubset_{-1}}$ 是集中于 -1 层次的复形, 从而

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P_{\sqsubset_{-1}}[m]) \cong \mathrm{Ext}_R^m(M, P^{-1}) = 0,$$

并且, 复形 $P_{\sqsupset_{-2}}$ 的非零层次的项数比复形 P 非零层次的项数少一个, 或者二者相等. 因此, 对复形 P 非零层次的项数进行数学归纳可得 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(M, P) = 0$. 证毕.

记 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 为 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 的由所有具有有限 Ding 投射维数的同调有界复形构成的子范畴.

引理 4.17 设 R 是环, 则 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 的三角全子范畴.

证明 由定义易知, $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 的一个全子范畴, 并且, $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 对 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中的同构封闭. 由引理 2.7 (1) 可知 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 对复形平移封闭. 下面证明 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 对复形的映射锥封闭. 设

$$X \to Y \to Z \to X[1]$$

是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中任一好三角, 其中 X 和 Y 具有有限的 Ding 投射维数. 不妨假设该好三角是由 $\mathrm{Ch}(R)$ 中短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

诱导的, 则由引理 2.7 (1) 可知 Z 也具有有限的 Ding 投射维数. 这说明 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$ 对复形的映射锥封闭. 证毕.

设 $\mathscr{A}$ 是 Frobenius 范畴, 将其投射-内射对象构成类记为 $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$, 则稳定范畴 $\underline{\mathscr{A}}$ 中的好三角是按如下方式得到的. 对任意的 $X \in \mathscr{A}$, 考虑 $\mathscr{A}$ 中行正合的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & C(u) \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

其中 $I(X) \in \mathscr{I}_{\mathscr{A}}$, $C(u)$ 是 (i, u) 的推出图, $\Sigma(X)$ 是 X 的一次余合冲, 则序列

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow C(u) \longrightarrow \Sigma(X)$$

就是 $\underline{\mathscr{A}}$ 中的好三角, 并且 Σ 是 $\underline{\mathscr{A}}$ 中的平移函子.

设 $\mathscr{T}$ 是三角范畴, $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{T}$ 的有厚度的三角子范畴 (即对直和因子封闭的三角子范畴), 则存在 Verdier 商范畴 $\mathscr{T}/\mathscr{K}$, 并且 $\mathscr{T}/\mathscr{K}$ 仍为三角范畴.

由引理 4.17 可知 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}$ 是三角范畴, 并且 $\mathrm{K}^b(\mathrm{Proj})$ 是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}$ 的有厚度的三角子范畴. 因此, Verdier 商 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 仍是三角范畴.

将每个 $\mathscr{D}\mathscr{P}$ 中 R-模 D 视为集中于 0 层次的复形, 则由引理 2.7 (2) 可知 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(D) < \infty$. 因此存在嵌入函子

$$\mathscr{D}\mathscr{P} \hookrightarrow D^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}.$$

记 F 是以下函子的合成:

$$\mathscr{D}\mathscr{P} \hookrightarrow \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}} \stackrel{\Pi_{DP}}{\to} \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}),$$

其中 Π_{DP} 是标准商函子. 显然 F 将每个 $\mathscr{P}$ 中的模变为 Verdier 商 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中的零对象. 因此, 由稳定范畴的泛性质可知 F 可通过 $\underline{\mathscr{D}\mathscr{P}}$ 分解, 即存在唯一的函子

$$\overline{F} : \underline{\mathscr{D}\mathscr{P}} \to \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}),$$

使得 $F = \overline{F}Q_{DP}$, 其中 $Q_{DP} : \mathscr{D}\mathscr{P} \to \underline{\mathscr{D}\mathscr{P}}$ 是标准商函子.

下述定理是本小节的主要结论.

定理 4.18 函子

$$\overline{F} : \underline{\mathscr{D}\mathscr{P}} \to \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$$

是三角等价.

证明 本证明分为四步: (1) 证明 $\overline{F}$ 是三角函子, (2)–(4) 分别证明 $\overline{F}$ 是稠密的、满的及忠实的.

(1) $\overline{F}$ 是三角函子. 设

$$X \stackrel{u}{\longrightarrow} Y \to Z \to \Sigma(X)$$

是 $\underline{\mathscr{D}\mathscr{P}}$ 中的好三角, 则存在 $\mathscr{D}\mathscr{P}$ 中的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中每行都是短正合序列. 这可以诱导 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中好三角的交换图, 其中 $\overline{\overline{u}}$ 表示 u 在 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中对应的右分式:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\overline{u}}"] & I(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & X[1] \arrow[d, "\overline{\overline{u}}{[1]}"] \\
Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r] & Y[1].
\end{tikzcd}$$

注意到在 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中 $I(X) = 0$, 因而 $\Sigma(X) \cong X[1]$. 因此

$$X \stackrel{\overline{\overline{u}}}{\longrightarrow} Y \to Z \to X[1]$$

是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中的好三角. 所以 $\overline{F}$ 是三角函子.

(2) $\overline{F}$ 是稠密的. 设 $X \in \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{D}\mathscr{P}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$, 则 X 是同调有界复形, 且存在 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(X) = m$, 从而由定义 2.6 可知, 存在 $\mathscr{F}$-完全投射分解

$$T \stackrel{\tau}{\longrightarrow} P \to X,$$

使得每个 $\mathrm{Z}^i(T)\in\mathscr{DP}$. 当 $i\le m$ 时, 有 $\tau^i=1_{P^i}$, 并且 P 上有界.

注意到复形 P 具有如下形式

$$\cdots\to P^{m-1}\to P^m\to\cdots\to P^{k-2}\to P^{k-1}\to P^k\to 0.$$

从而有 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中的好三角

$$P_{\sqsupset_{m+1}}\to P\to P_{\sqsubset_m}\to P_{\sqsupset_{m+1}}[1].$$

用相应商函子作用于该好三角, 可以得到 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中的好三角

$$P_{\sqsupset_{m+1}}\to P\to P_{\sqsubset_m}\to P_{\sqsupset_{m+1}}[1].$$

因此, 在 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中有同构 $P\cong P_{\sqsubset_m}$. 注意到在 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中有同构

$$P_{\sqsubset_m}\cong\mathrm{Coker}(P^{m-1}\to P^m)\cong\mathrm{Coker}(T^{m-1}\to T^m).$$

从而, 在 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中有如下同构

$$X\cong P\cong\mathrm{Coker}(T^{m-1}\to T^m).$$

注意到 $\mathrm{Coker}(T^{m-1}\to T^m)$ 属于 $\mathscr{DP}$. 所以 $\overline{F}$ 是稠密的.

(3) $\overline{F}$ 是满的.

由于 $F=\overline{F}Q_{DP}$, 从而只需证明 F 是满的. 设

$$X\xleftarrow{\alpha}Z\xrightarrow{g}Y$$

是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中的态射, 其中 $X,Y\in\mathscr{DP}$, α 位于 $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 对应的饱和相容乘法系. 将 α 补成一个好三角

$$X[-1]\xrightarrow{\omega}H\to Z\xrightarrow{\alpha}X,$$

使得 $H\in K^b(R\text{-Proj})$. 考虑 $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 中的好三角

$$H_{\sqsupset_1}\xrightarrow{h}H\xrightarrow{\varphi}H_{\sqsubset_0}\longrightarrow H_{\sqsubset_1}[1].$$

由引理 4.16 (1) 可知 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})}(X[-1],H_{\sqsubset 0})=0$. 这说明 $\varphi\omega=0$, 因而 ω 可通过 h 分解. 考虑如下好三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
X[-1] & \longrightarrow & H_{\sqsupset -1} & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{s} & X\\
\downarrow\| & & \downarrow h & & \downarrow l & & \downarrow\|\\
X[-1] & \xrightarrow{\omega} & H & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\alpha} & X,
\end{array}$$

其中 s,l,α 都位于 $\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 对应的饱和相容乘法系. 注意到 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(R\text{-Mod})}(H_{\sqsupset 1},Y)=0$ (见引理 4.16 (2)). 于是存在同态 $k:X\to Y$, 使得 $gl=ks=k\alpha l$. 从而 $k=g\alpha^{-1}$. 所以 F 是满的.

(4) $\overline{F}$ 是忠实的.

假设 $\underline{\mathscr{DP}}$ 中存在同态 $f:X\to Y$, 使得 $\overline{F}(f)=0$. 下证 $f=0$. 为此, 将 f 补成 $\underline{\mathscr{DP}}$ 中的好三角

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to\Sigma X.$$

因为 $\overline{F}(f)=0$, 所以 $\overline{F}(g)$ 是可裂单的. 由步骤 (3) 可知 $\overline{F}$ 是满的. 于是存在一个同态 $\alpha:Z\to Y$, 使得 $1_{\overline{F}(Y)}=\overline{F}(\alpha g)$; 还存在同态 $\beta:Y\to Y$, 使得 $\overline{F}(\beta)=1_{\overline{F}(Y)}$, 并且 $\beta=\alpha g$. 现将 β 补成 $\underline{\mathscr{DP}}$ 中的好三角

$$Y\xrightarrow{\beta}Y\to\mathrm{C}(\beta)\to\Sigma Y.$$

易知 $\overline{F}(\mathrm{C}(\beta)) \in \mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$. 由文 [7, 引理 2.4] 可知每个具有有限平坦维数的 Ding 投射模是投射的. 这一事实说明 $\mathrm{C}(\beta) \in \mathscr{P}$. 因此 β 在 $\underline{\mathscr{DP}}$ 中是同构. 这蕴含着 g 是可裂单的, 因而 $f = 0$. 进而 $\overline{F}$ 是忠实的. 证毕.

注意到引理 4.15, 4.16 和 4.17 均具有 Ding 内射模的对偶版本. 特别地, 子范畴 $\mathscr{DI}$ 构成 Frobenius 范畴, 其投射-内射对象类即 $\mathscr{I}$. 分别记 $\underline{\mathscr{DI}}$ 和 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DI}}}$ 为 $\mathscr{DI}$ 的稳定范畴和 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中由所有具有有限 Ding 内射维数的同调有界复形构成的全子范畴, 则 $\underline{\mathscr{DI}}$ 和 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DI}}}$ 是三角范畴, 并且 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DI}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})$ 亦为三角范畴.

定理 4.19 对任意环 R, 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DI}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}).$$

由文 [2, 定理 6.9] 可知, 环 R 是左 Gorenstein 正则环当且仅当存在三角等价

$$\underline{\mathscr{GP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) \quad (\text{或 } \underline{\mathscr{GI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj})).$$

该结论首次将 Buchweitz 定理扩展到大模范畴的情形, 并给出了逆. 特别地, 奇点范畴和 Gortenstein 正则环密切相关.

如下推论进一步讨论了奇点范畴和 Gortenstein 正则环间的关系, 并且彻底回答了引言中的问题 1.2. 注意到我们的方法不同于文 [2, 定理 6.9].

推论 4.20 设 R 是环, 则以下条件等价:

(1) R 是左 Gorenstein 正则的.

(2) 对任意的 R-模 M, 都有 $\mathrm{Dpd}_R(M) < \infty$.

(3) 对任意的 R-模 M, 都有 $\mathrm{Did}_R(M) < \infty$.

(4) $\mathrm{l.D\text{-}gl.dim}(R) < \infty$.

(5) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

(6) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}).$$

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) 可由定理 3.12 及定义 3.8 证得.

(1)$\Rightarrow$(5) 只需证明每个 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中的复形

$$P = 0 \to P^m \to \cdots \to P^{k-2} \to P^{k-1} \to P^k \to 0$$

满足 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(P) < \infty$. 首先由 R 的左 Gorenstein 正则性, 定义 3.8 和定理 3.12 可知, 对每个 $m \le i \le k$, $\mathrm{Dpd}_R(P^k) < \infty$. 进而由引理 2.7 (2) 可知, 对每个 $m \le i \le k$, $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(P^i) < \infty$. 考虑 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$ 中的好三角

$$P_{\sqsupset_{k-1}} \to P \to P_{\sqsubset_k} \to P_{\sqsupset_{k-1}}[1].$$

注意到 $P_{\sqsubset_k} = P^k$, 是集中于 k 层次的复形, 从而 $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(P_{\sqsubset_k}) < \infty$, 并且, 复形 $P_{\sqsubset_{k-1}}$ 的非零层次的项数比复形 P 非零层次的项数少一个, 或者二者相等. 因此, 对复形 P 非零层次的项数进行数学归纳可证明, $\mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(P) < \infty$.

(5)⇒(2) 由 (5) 可知存在三角等价 $\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$. 由定理 4.18 可知存在三角等价 $\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$. 于是存在以下三角等价

$$\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

注意到 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 的三角子范畴. 从而可用通常的方法验证

$$\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}} = \mathbf{D}^b(R\text{-Mod}).$$

设 M 是任一 R-模, 则 $M \in \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})$. 从而由上述等式可知, $M \in \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}$. 因此, 由引理 2.7 (2) 可知 $\mathrm{Dpd}_R(M) = \mathrm{Dpd}_{\mathrm{Ch}(R)}(M) < \infty$.

(1)⇒(6) 和 (6)⇒(2) 分别对偶于 (1)⇒(5) 和 (5)⇒(2). 证毕.

由文 [1, 引言, p.123] 可知环 R 是光滑的 (即 $\mathrm{l.gl.dim}(R) < \infty$) 当且仅当

$$\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) = 0.$$

由此可看出 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 能够测量环 R 的光滑性. 这一事实可由如下推论重新得到.

推论 4.21 设 R 是环, 则以下条件等价:

(1) R 是光滑的, 即 $\mathrm{l.gl.dim}(R) < \infty$.

(2) R 是左 Gorenstein 正则环且 $\mathscr{DP} = \mathscr{P}$.

(3) R 是左 Gorenstein 正则环且 $\mathscr{DI} = \mathscr{I}$.

(4) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) = 0$.

(5) $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}) = 0$.

证明 易得 (1) ⇔ (2) ⇔ (3).

(2)⇒(4) 由 R 的左 Gorenstein 正则性和推论 4.20 可知存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

由 $\mathscr{DP} = \mathscr{P}$ 可得 $\underline{\mathscr{DP}} = 0$. 因此, $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) = 0$.

(4)⇒(2) 注意到 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 是 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$ 的三角子范畴, 从而由假设可知 $\mathbf{D}^b(R\text{-Mod})_{\widehat{\mathscr{DP}}}/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}) = 0$. 进而由定理 4.18 可知 $\underline{\mathscr{DP}} = 0$. 于是 $\mathscr{DP} = \mathscr{P}$. 另一方面,

$$\underline{\mathscr{DP}} = 0 \simeq 0 = \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj})$$

综上所述, 由推论 4.20 可知 R 是左 Gorenstein 正则环.

(3)⇒(5) 和 (5)⇒(3) 分别对偶于 (2)⇒(4) 和 (4)⇒(2). 证毕.

由文 [11, 定理 12.3.1] 可知, 一个双边 Noether 环 R 是 Gorenstein 环当且仅当对于任意的 $M \in R\text{-Mod}$, $\mathrm{Gpd}_R(M) < \infty$, 等价地, 当且仅当 R 是左 Gorenstein 正则环. 由推论 4.20 和这一事实可直接得到:

推论 4.22 设 R 是双边 Noether 环, 则以下条件等价:

(1) R 是 Gorenstein 环.

(2) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DP}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Proj}).$$

(3) 存在三角等价

$$\underline{\mathscr{DI}} \simeq \mathbf{D}^b(R\text{-Mod})/\mathrm{K}^b(R\text{-Inj}).$$

致谢 感谢刘仲奎教授和杨晓燕教授的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] Bao Y. H., Du X. N., Zhao Z. B., Gorenstein singularity categories, *J. Algebra*, 2015, **428**: 122–137.
[2] Beligiannis A., The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co)stabilization, *Comm. Algebra*, 2000, **28**: 4547–4596.
[3] Bennis D., Hu K., Wang F. G., Gorenstein analogue of Auslander's theorem on the global dimension, *Comm. Algebra*, 2015, **43**: 174–181.
[4] Bennis D., Mahdou N., Global Gorenstein dimensions, *Proc. Amer. Math.*, 2010, **138**: 461–465.
[5] Buchweitz R. O., Maximal cohen-macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings, 1987, unpublished manuscript, 155pp. Available at https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/16682.
[6] Chen X. W., Homotopy equivalences induced by balanced pairs, *J. Algebra*, 2010, **324**: 2718–2731.
[7] Ding N. Q., Li Y. L., Mao L. X., Strongly Gorenstein flat modules, *J. Aust. Math. Soc.*, 2009, **86**: 323–338.
[8] Emmanouil I., On the finiteness of Gorenstein homological dimensions, *J. Algebra*, 2012, **372**: 376–396.
[9] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.*, 1995, **220**: 611–633.
[10] Enochs E. E., Cortés-Izurdiaga M., Torrecillas B., Gorenstein conditions over triangular matrix rings, *J. Pure Appl. Algebra*, 2014, **218**: 1544–1554.
[11] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Relative Homological Algebra, de Gruyter Exp. Math., Vol. 30, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2000.
[12] Gillespie J., Model Structures on Modules over Ding–Chen rings, *Homotopy Homology Appl.*, 2010, **12**: 61–73.
[13] Happel D., Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[14] Happel D., On Gorenstein Algebras, Progress in Mathematics, Birkh Auser Verlag, Basel, 1991, Vol. 95, 389–404.
[15] Holm H., Gorenstein Homological Algebra, PhD thesis, University of Copenhagen, Denmark, 2004.
[16] Holm H., Gorenstein homological dimensions, *J. Pure Appl. Algebra*, 2004, **189**: 167–193.
[17] Iwanage Y., On rings with finite self-injective dimension, *Comm. Algebra*, 1979, **7**: 393–414.
[18] Lam T. Y., Lectures on modules and rings, Springer Science & Business Media, 2012.
[19] Mao L. X., Ding N. Q., Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules, *J. Algebra Appl.*, 2008, **4**: 497–506.
[20] Orlov D., Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau–Ginzburg models, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, **246**: 227–248.
[21] Rickard J., Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra*, 1989, **61**: 303–317.
[22] Wang Z. P., Liu Z. K., Strongly Gorenstein flat dimensions of complexes, *Comm. Algebra*, 2016, **44**: 1390–1410.
[23] Yang C. H., Strongly Gorenstein flat and Gorenstein FP-injective modules, *Turkish J. Math.*, 2013, **37**: 218–230.
[24] Yang G., Homological properties of modules over Ding-Chen rings, *J. Korean Math. Soc.*, 2012, **49**: 31–47.
[25] Yang G., Liu Z. K., Liang L., Ding projective and Ding injective modules, *Algebra Colloq.*, 2013, **20**: 601–612.
[26] Zhang C. X., Liu Z. K., Rings with finite Ding homological dimensions, *Turk. J. Math.*, 2015, **39**: 37–48.
[27] Zhang P., Triangulated Categories and Derived Categories (in Chinese), Science Press, Beijing, 2015.