第62卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.62, No.1
2019年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2019

文章编号: 0583-1431(2019)01-0151-06 **文献标识码: A**

Gorenstein 范畴上的一个问题

张东东

浙江师范大学数理与信息工程学院 金华 321004
E-mail: zdd@zjnu.cn

朱海燕

浙江工业大学理学院 杭州 310023
E-mail: hyzhu@zjut.edu.cn

胡江胜

江苏理工学院数理学院 常州 321001
E-mail: jiangshenghu@jsut.edu.cn

摘 要 设 $\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴, $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的子范畴. Sather-Wagstaff, Sharif 和 White 引入了 Gorenstein 子范畴的概念, 记为 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$. 我们用 $\mathscr{PP}$ (相应地, $\mathscr{P}$) 代表纯投射 R- 模类 (相应地, 投射 R- 模类). 本文给出了一类满足条件 "$\mathscr{G}(\mathscr{P}) \not\subseteq \mathscr{G}(\mathscr{PP})$" 的环, 由此给出了当 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{X}$ 的子范畴时, $\mathscr{G}(\mathscr{W})$ 是否包含在 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ 中的一个否定回答. 进一步, 刻画了包含关系 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{PP})$ 和 $\mathscr{G}(\mathscr{PP}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$ 何时成立.

关键词 纯投射模; Gorenstein 投射模; Gorenstein 范畴
MR(2010) 主题分类 18G10, 18G20, 16E65
中图分类 O154.1, O154.2

On a Question of Gorenstein Categories

Dong Dong ZHANG

College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004*, P. R. China*
E-mail: *zdd@zjnu.cn*

Hai Yan ZHU

College of Science, Zhejiang University of Technology Hangzhou 310023*, P. R. China*
E-mail: *hyzhu@zjut.edu.cn*

Jiang Sheng HU

School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou 321001*, P. R. China*
E-mail: *jiangshenghu@jsut.edu.cn*

收稿日期: 2018-01-29; 接受日期: 2018-03-08
基金项目: 国家自然科学基金 (11501257, 11671069, 11771212); 中国博士后科学基金 (2016M600426); 浙江省自然科学基金 (LY18A010032); 中国留学基金委资助项目; 江苏高校 "青蓝工程" 资助项目
通讯作者: 朱海燕

Abstract Let $\mathscr{A}$ be an abelian category and $\mathscr{X}$ a subcategory of $\mathscr{A}$. Sather-Wagstaff, Sharif and White introduced the Gorenstein subcategory $\mathscr{G}(\mathscr{X})$. Denote by $\mathscr{P}\mathscr{P}$ the class of pure-projective R-modules and by $\mathscr{P}$ the class of projective R-modules. We show that there are some rings such that $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \nsubseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$, which gives a negative answer to the Question that whether $\mathscr{G}(\mathscr{W})$ is contained in $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ provided that $\mathscr{W}$ is a subcategory of $\mathscr{X}$. In addition, we give some characterizations of when $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$ and $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$ hold.

Keywords pure-projective module; Gorenstein projective module; Gorenstein category

MR(2010) Subject Classification 18G10, 18G20, 16E65

Chinese Library Classification O154.1, O154.2

1 引言

文本中 R 为有单位元的结合环, 所有的 R- 模均为左酉模. $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{I}$ 分别表示所有投射 R-模和内射 R- 模构成的类. 用 $\mathrm{Mod}(R)$ 代表所有左 R- 模构成的模范畴. 文中未加说明的概念和术语, 见文 [1, 11, 14].

设 $\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴, $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的子范畴. Sather-Wagstaff 等人 [18] 引入了 Gorenstein 子范畴的概念. 值得注意的是, Gorenstein 子范畴的概念统一了以下的概念: Gorenstien 维数为 0 的模类 [2], Gorenstein 投射模类 [10], Gorenstein 内射模类 [10], V-Gorenstein 投射模类 [12], V-Gorenstein 内射模类 [12]. $\mathscr{A}$ 上的正合复形

$$X^{\bullet} := \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial^X_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial^X_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

称为全 $\mathscr{X}$- 正合 [18] 是指每个 $X_i \in \mathscr{X}$ 且函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathscr{X})$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{X}, -)$ 作用到 $X^{\bullet}$ 上仍正合. 设 M 为 $\mathscr{A}$ 中的对象. 若存在全 $\mathscr{X}$- 正合复形 X, 使得 $M \cong \mathrm{Coker}(\partial^X_1)$, 则称 M 为全 $\mathscr{X}$- 正合对象. 我们用 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中所有全 $\mathscr{X}$- 正合对象构成的子范畴. 若 $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}(R)$, 则 $\mathscr{G}(\mathscr{P})$ (相应地, $\mathscr{G}(\mathscr{I})$) 表示所有 Gorenstein 投射 (相应地, Gorenstein 内射) R- 模构成的类. 设 $\mathscr{G}^0(\mathscr{X}) = \mathscr{X}$, $\mathscr{G}^1(\mathscr{X}) = \mathscr{G}(\mathscr{X})$ 和 $\mathscr{G}^{n+1}(\mathscr{X}) = \mathscr{G}(\mathscr{G}^n(\mathscr{X}))$, 其中整数 $n \geq 1$. 由文 [18, 注 4.2] 可知, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X})$, 并且 $\mathscr{G}^n(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{G}^{n+1}(\mathscr{X})$, 其中整数 $n \geq 1$. Sather-Wagstaff, Sharif 和 White 在文 [18] 中证明了 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ 拥有很多好的性质. 例如, 对 $\mathscr{A}$ 的两个子范畴 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{W}$, 若有 $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{X}$, $\mathscr{X}$ 对扩张封闭, 并且 $\mathscr{W}$ 既是 $\mathscr{X}$ 的内射余生成子又是 $\mathscr{X}$ 的投射余生成子, 则由文 [18, 定理 4.9] 可知 $\mathscr{G}^n(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{W})$, 其中整数 $n \geq 1$. 但是, 一般情况下 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ 不包含在 $\mathscr{G}(\mathscr{W})$ 中 (见文 [18, 例 5.9]). 因此, Sather-Wagstaff, Sharif 和 White 提出下述的公开问题:

问题 1.1 (见文 [18, 问题 5.8]) 设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{A}$ 的子范畴且 $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{X}$, 是否一定有 $\mathscr{G}(\mathscr{W}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X})$?

根据文 [7, 14], R- 模范畴中的正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 称为纯正合列是指对任意有限表示 R- 模 C, 序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, Z) \longrightarrow 0$ 正合. R- 模 M 称为纯投射是指对每个纯正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, 序列 $\mathrm{Hom}_R(M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, Z) \longrightarrow 0$ 正合. 由文 [8, 定理 18–2.10], M 是纯投射模当且仅当 M 是有限表现模的直和的直和项. 设 $\mathscr{P}\mathscr{P}$ 表示纯投射 R- 模类, 显然有 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}\mathscr{P}$. 因此, 下面的定理给出问题 1.1

的一个否定回答.

定理 1.2 设 R 为环, 下列陈述成立:

(1) 若 $R = K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n})$, 其中 K 为域, 整数 $n \geq 2$ 并且每个 $t_i \geq 2$, 则 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \nsubseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$.

(2) 若 R 是左半遗传环但非 von Neumann 正则环, 则 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \nsubseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$.

由定理 1.2 自然要问何时 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$ 和 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$ 成立? 有下述定理.

定理 1.3 设 R 为环, 下列陈述成立:

(1) 若 R 是阿丁代数, 则 R 是有限 CM- 型的 virtually Gorenstein 代数当且仅当 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$.

(2) 若 R 是左诺特环, 则 R 是拟 Frobenius 的当且仅当 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$.

2 主要结论

设 $F^{\bullet} : \cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots$ 为 $\mathrm{Mod}(R)$ 上的链复形. 如果 $F^{\bullet}$ 是正合的, 且对于任意有限表示 R- 模 C 所诱导 Abel 群上的复形

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, F_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, F_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, F_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

是正合的, 则称 $F^{\bullet}$ 是纯正合的 [9]. 由文 [6], 若对任意 R- 模 M, 有 $\mathrm{Hom}_R(M, F^{\bullet})$ 正合, 则称 $F^{\bullet}$ 为可缩的复形 (contractible complex).

命题 2.1 设 R 是环, 则 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) = \mathscr{P}\mathscr{P}$.

证明 只需证 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{P}\mathscr{P}$. 如果 $M \in \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$, 那么存在一个完全 $\mathscr{P}\mathscr{P}$- 正合的复形

$$P^{\bullet} : \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{\partial_0^P} P_{-1} \longrightarrow \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Coker}(\partial_1^{P^{\bullet}})$. 因为每个有限表示 R- 模都是纯投射的, 所以容易看出 $P^{\bullet}$ 是一个纯投射模的纯正合复形. 由文 [9, 推论 3.7] 可知 $P^{\bullet}$ 是可缩的. 由此易知 M 同构于 P_{-1} 的直和项, 因此 $M \in \mathscr{P}\mathscr{P}$. 于是有 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{P}\mathscr{P}$, 所以 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) = \mathscr{P}\mathscr{P}$. 证毕.

引理 2.2 设 K 是域, $\Lambda = KQ/I$, 其中 Q 是箭图 $\alpha_1 \circlearrowleft \overset{1}{\circ} \circlearrowright \alpha_2$, I 是 KQ 由 $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1, \alpha_1^2$ 和 α_2^2 生成的 KQ 的理想. 如果令 $V = (\bigoplus_{i=1}^{\infty} K\xi_i) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} K\eta_i)$, ϕ_1, ϕ_2 为 V 到 V 自身上的映射, 使得 $\phi_1(\sum_{i=1}^n k_i\xi_i + \sum_{j=1}^m l_j\eta_j) = \sum_{i=1}^n k_i\eta_{i+1}$, $\phi_2(\sum_{i=1}^n k_i\xi_i + \sum_{j=1}^m l_j\eta_j) = \sum_{i=1}^n k_i\eta_i$, 则 $M = \phi_1 \circlearrowleft V \circlearrowright \phi_2$ 为不可分解表示.

证明 注意到 $\mathrm{End}(M) = \{\varphi : V \longrightarrow V \mid \varphi\phi_1 = \phi_1\varphi,\ \varphi\phi_2 = \phi_2\varphi\}$, 因此, 对任意的 $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, 有

$$\varphi\phi_1(\xi_i) = \varphi(\eta_{i+1}) = \phi_1\varphi(\xi_i), \tag{1}$$

$\phi_1\varphi(\eta_i) = \varphi\phi_1(\eta_i) = 0$, 从而得到 $\varphi(\eta_i) \in \mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{span}\{\eta_j \mid j \geq 1\}$, 以及

$$\varphi\phi_2(\xi_i) = \varphi(\eta_i) = \phi_2\varphi(\xi_i). \tag{2}$$

对任意 $i \geq 1$, 假设 $\varphi(\xi_i) = a_i + b_i$, 其中 $a_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_{ji}\xi_j$, $b_i = \sum_{j=1}^{m_i} l_{ji}\eta_j$, $k_{ji}, l_{ji} \in K$. 于是 $\varphi(\eta_1) \overset{(2)}{=} \phi_2\varphi(\xi_1) = \phi_2(a_1 + b_1) = \sum_{j=1}^{n_1} k_{j1}\eta_j$; $\varphi(\eta_2) \overset{(2)}{=} \phi_2\varphi(\xi_2) = \phi_2(a_2 + b_2) = \sum_{j=1}^{n_2} k_{j2}\eta_j$, $\varphi(\eta_2) \overset{(1)}{=} \phi_1\varphi(\xi_1) = \phi_1(a_1 + b_1) = \sum_{j=1}^{n_1} k_{j1}\eta_{j+1}$.

因此, 对任意 $j \geq 2$, 有 $n_2 = n_1 + 1$, $k_{12} = 0$, $k_{j2} = k_{j-1,1}$, 所以 $a_2 = \sum_{j=2}^{n_1+1} k_{j-1,1}\xi_j$ 且 $\varphi(\eta_2) = \sum_{j=2}^{n_1+1} k_{j-1,1}\eta_j$. 以此类推, 可得对任意的 $i \geq 1$, a_i 和 $\varphi(\eta_i)$ 都可由 a_1 的系数所确定. 事实上, $a_i = \sum_{j=i}^{n_1+i-1} k_{j-i+1,1}\xi_j$, $\varphi(\eta_i) = \sum_{j=i}^{n_1+i-1} k_{j-i+1,1}\eta_j$.

从而, 对于任意 $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, 有

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots)\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix},$$

其中 B 是列有限的矩阵, 且

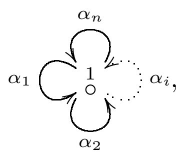
$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_2 & k_1 & 0 & 0 & \ddots \\ k_3 & k_2 & k_1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ k_n & k_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & k_n & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

若 $\varphi^2 = \varphi \in \mathrm{End}(M)$, 则 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ B & A \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$. 因此 $A^2 = A$, $BA + AB = B$. 这就直接证明了 $A = 0$, 或者

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

不管哪种情形, 都有 $B = 0$. 因此 $\varphi = 1$ 或者 $\varphi = 0$, 从而就有 M 是不可分解的. 证毕.

引理 2.3 设 K 为域, Q 是箭图

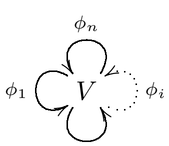


I 为由 $\{\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i\}_{i,j=1}^n$, $\alpha_1^{t_1}, \ldots, \alpha_n^{t_n}$ 生成的 KQ 的理想, 其中 $n \geq 2$ 且对任意的 $1 \leq i \leq n$, $t_i \geq 2$. 令 $V = (\bigoplus_{i=1}^\infty K\xi_i) \oplus (\bigoplus_{i=1}^\infty K\eta_i)$,

$$\phi_1 : V \longrightarrow V,\quad \phi_1\left(\sum_{i=1}^n k_i\xi_i + \sum_{j=1}^m l_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^n k_i\eta_{i+1},$$

$$\phi_2 : V \longrightarrow V,\quad \phi_2\left(\sum_{i=1}^n k_i\xi_i + \sum_{j=1}^m l_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^n k_i\eta_i,\quad \phi_j = 0,\quad 3 \leq j \leq n,$$

则

$M =$ 

是 $\Lambda = KQ/I$ 上的不可约表示, 且 M 不是纯投射的.

证明 第一部分的证明和引理 2.2 的证明类似. 显然, M 是无限生成的. 如果 M 是纯投射的, 由于 Λ 是有限维代数, 所以通过文 [16, 定理 2.2] 可以得到, M 是不可分解有限表现 Λ- 模的直和. 因为 M 是不可分解的, 所以 M 是有限表现的. 因此就与 M 是无限生成的矛盾, 所以 M 不是纯投射的. 证毕.

如果环 R 既是左自内射的又是左诺特的, 则称环 R 是拟-Frobenius. 这个定义是左右对称的, 且拟-Frobenius 环总是 (双边) 阿丁的. 文 [15, 15D. 419 页] 中都有一些拟-Frobenius 环的例子和刻画. 比如: 设代数 K 为域, $t_i > 0$, 则 $K[x_1,\dots,x_n]$ 模去关系 $x_1^{t_1} = \cdots = x_n^{t_n} = 0$ 后的商代数是一个交换的局部的 Frobenius 代数 (见文 [15, 15D. 419 页]), 因此它就是拟-Frobenius 的. 众所周知, 环 R 是拟-Frobenius 的充要条件是所有 R- 模都是 Gorenstein 投射的 (见文 [5, 定理 2.2]). 现在就来证明引言中的定理 1.2 (1).

定理 1.2 (1) 的证明 由文 [15, 15D. 419 页] 可知 R 是局部 Frobenius 的 K- 代数. 因此 R 是拟-Frobenius, 即任意 R- 模都是 Gorenstein 投射的. 令 Λ 为引理 2.3 中的代数, 那么 R 同构于 Λ. 通过引理 2.3 可知存在一个无限生成的不可分解的 R- 模 M, 但 M 不是纯投射的. 因此, 由命题 2.1 可知 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \nsubseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$. 证毕.

如果环 R 的任意有限生成的左理想都是投射的, 则称 R 是左半遗传的. 如果环 R 中的每个元素 a, 存在 $x \in R$, 使得 $a = axa$, 则称 R 是 von Neumann 正则的. 由文 [13, 定理 1.1] 可知, 环 R 是 von Neumann 正则当且仅当每个主左理想由一个幂等元生成, 当且仅当每个有限生成左理想可由一个幂等元生成. 因此任意 von Neumann 正则环都是半遗传的, 一般情况下, 逆命题不成立. 例如: 整数环 $\mathbb{Z}$ 是半遗传的, 但却不是 von Neumann 正则的.

命题 2.4 设 R 是一个环. 如果 $\mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$, 那么下述条件等价:

(1) R 是 von Neumann 正则的;

(2) R 是左半遗传的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (1) 对任意的 $a \in R$, 由 $R/Ra \in \mathscr{P}\mathscr{P} = \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$ 和假设可得 R/Ra 是 Gorenstein 投射的. 另一方面, 因为 R 是半遗传的, 我们就有 R/Ra 的投射维数最多为 1. 因此 R/Ra 是投射的, 则 Ra 是 R 的直和项. 所以 R 是 von Neumann 正则环. 证毕.

定理 1.2 (2) 的证明 由命题 2.4 可知定理 1.2 (2) 成立, 证毕.

设 $\mathscr{W}$ 为 R- 模构成的类. 令

$$^{\perp}\mathscr{W} = \{X \in \mathrm{Mod}(R) \,|\, \mathrm{Ext}_R^n(X, W) = 0,\ \forall n \geq 1, W \in \mathscr{W}\}.$$

类似地, 我们可以定义 $\mathscr{W}^{\perp}$. 设 R 为阿丁代数且 $^{\perp}\mathscr{G}(\mathscr{P}) = \mathscr{G}(\mathscr{I})^{\perp}$, 则称 R 为 virtually Gorenstein 代数 [3]. 若在同构意义下, 只有有限多个不可分解的有限生成 Gorenstein 投射 R- 模, 则称 R 为有限 Cohen–Macaulay 型, 缩写成有限 CM- 型. 下述结果刻画了什么时候 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$, 也包含了引言中的定理 1.3 (1).

命题 2.5 设 R 为阿丁代数, 则下述陈述等价:

(1) R 是有限 CM- 型的 virtually Gorenstein 代数;

(2) $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P}\mathscr{P})$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 如果 R 是有限 CM- 型的 virtually Gorenstein 代数, 则由文 [4, 定理 4.10] 可知, 任意的 Gorenstein 投射 R- 模都是有限生成 R- 模的直和, 因此就是有限表现 R- 模的直和

(因为 R 是阿丁代数). 所以 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{PP})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 如果 $\mathscr{G}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{PP})$, 那么由命题 2.1 可知, 任意 Gorenstein 投射 R- 模是纯投射的. 如果 M 是 Gorenstein 投射的, 那么 M 是纯投射. 所以通过文 [16, 定理 2.2], 就有 M 是不可分解有限表现 R- 模的直和. 这由文 [4, 定理 4.10] 就说明 R 是有限 CM- 型的 virtually Gorenstein 代数. 证毕.

下面用包含定理 1.2 (2) 的一个命题来结束本文.

命题 2.6 设 R 是左诺特的, 则下述陈述等价:

(1) R 是拟 Frobenius 的;

(2) $\mathscr{G}(\mathscr{PP}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\mathscr{G}(\mathscr{PP}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{P})$, 因为 R 是左诺特的, 所以任意有限生成的 R- 模都是 Gorenstein 投射的. 对于 R 的左理想 I , R/I 是 Gorenstein 投射的, 从而有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I, R) = 0$. 这由 Baer 准则就可说明 R 是左自内射的, 因此 R 是拟 Frobenius. 证毕.

参 考 文 献

[1] Assem I., Simson D., Skowronski A., Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Vol. 1: Techniques of Representation Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] Auslander M., Bridger M., Stable Module Theory, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[3] Beligiannis A., Cohen-Macaulay modules, (co)torsion pairs, and virtually Gorenstein algebras, *J. Algebra*, 2005, **288**: 137–211.

[4] Beligiannis A., On algebras of finite Cohen-Macaulay type, *Adv. Math.*, 2011, **226**: 1973–2019.

[5] Bennis D., Mahdou N., Ouarghi K., Rings over which all modules are strongly Gorenstein projective, *Rocky Moutain J. Math.*, 2010, **40**: 749–759.

[6] Christensen L. W., Foxby H. B., Holm H., Derived category methods in commutative algebra, 2017 (Preprint), http://www.math.ttu.edu/ lchriste/book.html.

[7] Cohn P. M., On the free product of associative rings, *Math. Z.*, 1959, **71**: 380–398.

[8] Dauns J., Modules and Rings, Cambridge University Press, New York, 1994.

[9] Emmanouil I., On pure acyclic complexes, *J. Algebra*, 2016, **465**: 190–213.

[10] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.*, 1995, **220**: 611–633.

[11] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Relative Homological Algebra, de Gruyter Exp. Math., vol. 30, Walter de Gruyter, New York, 2000.

[12] Enochs E. E., Jenda O. M. G., Lopéz-Ramos J. A., Covers and envelopes by V-Gorenstein modules, *Comm. Algebra*, 2005, **33**: 4705–4717.

[13] Goodearl K. R., Von Neumann Regular Rings, Monographs and Studies in Mathematics, No.4, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

[14] Jensen C. U., Lenzing H., Model Theoretic Algebra with Particular Emphasis on Fields, Rings, Modules, Algebra, Logic and Applications, Vol. 2, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.

[15] Lam T. Y., Lecture on Modules and Rings, Graduate Texts Math., vol. 189, Springer-Verlag, New York, 1999.

[16] Moradzadeh-Dehkordi A., On the structure of pure-projective modules and some applications, *J. Pure Appl. Algebra*, 2007, **221**: 935–947.

[17] Nicholson W. K., Yousif M. F., Quasi-Frobenius Rings, Cambridge Tracts in Math., vol. 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[18] Sather-Wagstaff S., Sharif T., White D., Stability of Gorenstein categories, *J. London Math. Soc.*, 2008, **77**: 481–502.