第53卷第3期 数学学报中文版 Vol.53, No.3
2010年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2010

文章编号: 0583-1431(2010)03-0541-10 **文献标识码: A**

Calderón–Zygmund 型算子及其交换子的有界性

刘宗光 李 佳

中国矿业大学 (北京) 数学系 北京 100083

E-mail: liuzg@cumtb.edu.cn; lijia0601@163.com

摘 要 本文得到了 Calderón–Zygmund 型算子及其与 BMO 函数或 Lipschitz 函数生成的交换子在 Herz 型 Hardy 空间上的一些有界性结果.

关键词 Calderón–Zygmund 型算子; 交换子; Herz 型 Hardy 空间

MR(2000) 主题分类 42B20

中图分类 O174.2

Boundedness of Calderón–Zygmund Type Operators and Their Commutators

Zong Guang LIU Jia LI

Department of Mathematics, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, P. R. China

E-mail: *liuzg@cumtb.edu.cn*; *lijia0601@163.com*

Abstract In this paper, the authors establish some boundedness of Calderón–Zygmund type operators and their commutators generated by BMO functions or Lipschitz functions on Herz-type Hardy spaces.

Keywords Calderón–Zygmund type operator; commutator; Herz-type Hardy spaces

MR(2000) Subject Classification 42B20

Chinese Library Classification O174.2

1 引言

设 $\mathscr{S}(\mathrm{R}^n)$ 是 R^n 上的 Schwartz 函数空间且 $\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$ 是其对偶空间即 R^n 上的缓增分布空间. 设 T: $\mathscr{S}(\mathrm{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathrm{R}^n)$ 是核为 K 的线性算子, 定义为: 对任意 $f \in C_c^\infty(\mathrm{R}^n)$,

$$Tf(x) = \int_{\mathrm{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f.$$

称 T 为 Calderón–Zygmund 型算子, 若其满足下述条件:

(1.1) T 可延拓为 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 上的有界算子;

收稿日期: 2009-03-04; 接受日期: 2009-10-27

基金项目: 教育部重点基金资助项目 (108136)

(1.2) K 为区域 $\{(x,y)\in \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n : x\neq y\}$ 内的光滑函数且存在常数 $C>0$, 使得

$$\int_{|x-y|>2|z-y|}(|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|)dx\leq C$$

对任意 $y,\ z\in \mathrm{R}^n$ 成立;

(1.3) 存在常数 $q_0>2$ 及正数序列 $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使对任意 $j\in N$,

$$\left(\int_{2^j|z-y|\leq|x-y|<2^{j+1}|z-y|}|K(x,y)-K(x,z)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}\leq C_j(2^j|z-y|)^{-n/q_0'}$$

及

$$\left(\int_{2^j|y-z|\leq|y-x|<2^{j+1}|y-z|}|K(y,x)-K(z,x)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}\leq C_j(2^j|z-y|)^{-n/q_0'},$$

其中 q_0' 是 q_0 的共轭指标, 即 $1/q_0+1/q_0'=1$.

注 1.1 我们知道经典 Calderón–Zygmund 算子的核 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)|\leq C|x-y|^{-n}$$

及存在 $\delta>0$, 当 $|x-y|>2|z-y|$ 时, 有

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leq C\frac{|z-y|^{\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}.$$

通过简单计算可知, 经典 Calderón–Zygmund 算子是 Calderón–Zygmund 型算子的特殊情形 ($C_j=2^{-j\delta}$).

最近, 文 [2] 研究了 Calderón–Zygmund 型算子在加权 Lebesgue 空间 $L^p_{\omega}(\mathrm{R}^n)$ $(1\leq p<\infty)$ 及加权 Hardy 空间 $H^1_{\omega}(\mathrm{R}^n)$ 上的有界性.

定理 A [2] 设 T 是 Calderón–Zygmund 型算子且序列 $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^1$, 则 T 可延拓为 $L^p(\mathrm{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上的有界算子且是弱 $(1,1)$ 型的.

对由 Calderón–Zygmund 型算子与 BMO 函数或 Lipschitz 函数生成的交换子, 文 [4] 利用 Sharp 极大函数的点态估计得到了其在 Lebesgue 空间的有界性.

定理 B [4] 设 T 是 Calderón–Zygmund 型算子且序列 $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^1$. 若 $b\in\mathrm{BMO}$, 则交换子 $[b,T]$ 在 $L^p(\mathrm{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 上有界, 且存在与 f 无关的常数 $C>0$, 使得

$$\|[b,T]f\|_p\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_p.$$

定理 C [4] 设 T 是 Calderón–Zygmund 型算子, $q_0>2$ 是条件 (1.3) 中的常数, $\{C_j\}\in l^1$. 若 $b\in\dot{\Lambda}_{\beta}$ 且 $0<\beta<\min\{1,n(1-2/q_0)\}$, 则交换子 $[b,T]$ 是从 $L^{q_1}(\mathrm{R}^n)$ 到 $L^{q_2}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子, 其中 $1<q_1<n/\beta$ 且 $1/q_2=1/q_1-\beta/n$. 进一步有

$$\|[b,T]f\|_{q_2}\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}}\|f\|_{q_1}.$$

受上述结果的启发, 本文建立 Calderón–Zygmund 型算子及其与 BMO 函数或 Lipschitz 函数生成的交换子在 Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 首先给出相关定义.

对 $k\in\mathrm{Z}$, 记 $B_k=\{x\in\mathrm{R}^n:|x|<2^k\}$, $E_k=B_k\setminus B_{k-1}$ 及 $\chi_k=\chi_{E_k}$ 为 E_k 上的特征函数.

定义 1.1 [5] 设 $\alpha\in\mathrm{R}$ 及 $0<p,\,q\leq\infty$.

(1) 齐次 Herz 空间 $\dot{K}^{\alpha,\,p}_q(\mathrm{R}^n)$ 定义为

$$\dot{K}^{\alpha,\,p}_q(\mathrm{R}^n)=\{f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n\setminus\{0\}):\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,\,p}_q(\mathrm{R}^n)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,\,p}_q(\mathrm{R}^n)}=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_q^p\right)^{1/p},$$

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时做通常的修改.

(2) 非齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 定义为

$$K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathrm{R}^n):\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}=\bigg(\|f\chi_{B_0}\|_q^p+\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_q^p\bigg)^{1/p},$$

当 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 时做通常的修改.

定义 1.2 [5] 设 $\alpha\in\mathrm{R}$, $0<p,\,q<\infty$, $G(f)$ 是 f 的 Grand 极大函数

$$G(f)(x)=\sup_{\varphi\in\mathscr{A}_N}|\varphi_\nabla^*(f)(x)|,$$

其中 $\mathscr{A}_N=\{\varphi\in\mathscr{S}(\mathrm{R}^n):\sup_{|\alpha|,\,|\beta|\le N}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|\le 1\}$ 及 $N\ge n+1$.

(1) 齐次 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 定义为

$$H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n):G(f)\in\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)\}$$

且

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}=\|G(f)\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}.$$

(2) 非齐次 Herz 型 Hardy 空间 $HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 定义为

$$HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'(\mathrm{R}^n):G(f)\in K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)\}$$

且

$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}=\|G(f)\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}.$$

注 1.2 显然, 对于 $0<p<\infty$ 及 $\alpha\in\mathrm{R}$, $H\dot{K}_p^{0,p}(\mathrm{R}^n)=HK_p^{0,p}(\mathrm{R}^n)=H^p(\mathrm{R}^n)$ 且 $H\dot{K}_p^{\alpha/p,p}(\mathrm{R}^n)=H_{|x|^\alpha}^p(\mathrm{R}^n)$, 因此 Herz 型 Hardy 空间是经典 Hardy 空间的推广, 齐次 Herz 型 Hardy 空间包含了带幂权的 Hardy 空间.

若 $1<q<\infty$, 我们知道当 $-n/q<\alpha<n(1-1/q)$ 时, $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)=\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 及 $HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)=K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$. 而当 $\alpha\ge n(1-1/q)$ 时, $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)\ne\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 及 $HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)\subset K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ (见文 [3,5]).

定义 1.3 [5] 设 $\alpha\ge n(1-1/q)$ 及 $1<q<\infty$. 称 R^n 上的函数 a 为中心 (α,q) 原子, 若

(1) 对 $r>0$, 有 $\operatorname{supp}a\subset B(0,r)$;

(2) $\|a\|_q\le|B(0,r)|^{-\alpha/n}$;

(3) 对任意满足条件 $0\le|\gamma|\le[\alpha-n(1-1/q)]$ 的多重指标 γ, 有 $\int_{\mathrm{R}^n}a(x)x^\gamma dx=0$.

称函数 a 为限制型中心 (α,q) 原子如果上述条件 (1) 对 $r\ge 1$ 成立, 且 (2) 及 (3) 成立.

引理 1.1 [5] 设 $0<p<\infty$, $1<q<\infty$ 及 $n(1-1/q)\le\alpha<\infty$. 则

(1) $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的充分必要条件是

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$$

在分布意义下成立, 其中 a_k 为中心 (α,q) 原子, $\operatorname{supp}a_k\subset B_k$ 且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$. 进一步, 有

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}\sim\inf\bigg\{\bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\bigg)^{1/p}\bigg\},$$

其中下确界取遍 f 的所有上述分解.

(2) $f \in HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的充分必要条件是

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x)$$

在分布意义下成立, 其中 a_k 为限制型中心 (α, q) 原子, $\operatorname{supp} a_k \subset B_k$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$. 进一步, 有

$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} \sim \inf\left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p \right)^{1/p} \right\},$$

其中下确界取遍 f 的所有上述分解.

文 [6] 中定义了 Herz 型 Hardy 空间的如下稠密子空间:

定义 1.4 [6] 对非负整数 s, 定义 Herz 型 Hardy 空间的稠密子空间 $D_s(\mathrm{R}^n)$ 及 $\dot{D}_s(\mathrm{R}^n)$ 为

$$D_s(\mathrm{R}^n) = \left\{ f \in C_c^{\infty}(\mathrm{R}^n) : \int_{\mathrm{R}^n} f(x) x^{\alpha} dx = 0,\ |\alpha| \le s \right\}$$

及

$$\dot{D}_s(\mathrm{R}^n) = \{ f \in D_s(\mathrm{R}^n) : 0 \notin \operatorname{supp} f \}.$$

对 $1 < p < \infty$, p' 表示 p 的共轭指标, 即 $1/p + 1/p' = 1$, χ_E 为集合 E 的特征函数; 对于 $t \in \mathrm{R}$, $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数; C 表示常数且不必处处相同. 本文仅建立齐次空间的有界性结果, 非齐次空间的相应结果也能类似地建立, 在此省略.

2 Calderón–Zygmund 型算子的有界性

定理 2.1 设 T 为 Calderón–Zygmund 型算子, $q_0 > 2$ 是条件 (1.3) 中的常数, $\varepsilon > 0$ 且序列 $\{C_j 2^{j\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty} \in l^1$. 若 $0 < p < \infty$, $1 < q \le q_0$ 及 $n(1-1/q) \le \alpha < n(1-1/q) + \varepsilon$, 则 T 是从 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

证明 由于 $\dot{\mathscr{D}}_s(\mathrm{R}^n)$ 在 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 稠密, 我们只需证明 T 从 $\dot{\mathscr{D}}_s(\mathrm{R}^n)$ 到 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 有界, 其中 $s = [\alpha - n(1-1/q)]$. 由于 $\dot{\mathscr{D}}_s(\mathrm{R}^n)$ 中函数具有有限的原子分解, 对 $f \in \dot{\mathscr{D}}_s(\mathrm{R}^n)$, 有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k(x)$$

对任意 $x \in \mathrm{R}^n \backslash \{0\}$ 成立, 其中 a_k 为中心 (α, q) 原子, $\operatorname{supp} a_k \subset B_{k+2} \backslash B_{k-1}$ 且存在非负整数 N, 使得当 $|k| > N$ 时, $\lambda_k = 0$ 及 $(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p)^{1/p} \le C \|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}$, 其中 $C > 0$ 与 f 无关.

显然, $Tf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k T a_k(x)$, 从而

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}^p &\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k| \, \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\ &\le C \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=-\infty}^{j-4} |\lambda_k| \, \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\ &\quad + C \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p} \left(\sum_{k=j-3}^{\infty} |\lambda_k| \, \|(Ta_k)\chi_j\|_q \right)^p \\ &:= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2. \end{aligned}$$

对于 I_2 的估计, 由 T 的 L^q 有界性, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\left(\sum_{k=j-3}^{\infty}|\lambda_k|\,\|a_k\|_q\right)^p\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\left(\sum_{k=j-3}^{\infty}|\lambda_k|\,2^{-k\alpha}\right)^p\\
&\le\begin{cases}C\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\sum_{k=j-3}^{\infty}|\lambda_k|^p\,2^{-k\alpha p}, & 0<p\le 1;\\ C\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=j-3}^{\infty}|\lambda_k|^p\,2^{(j-k)\alpha}\right)\left(\sum_{k=j-3}^{\infty}2^{(j-k)\alpha}\right)^{p/p'}, & 1<p<\infty,\end{cases}\\
&\le\begin{cases}C\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=-\infty}^{k+3}2^{(j-k)\alpha p}, & 0<p\le 1;\\ C\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=-\infty}^{k+3}2^{(j-k)\alpha}, & 1<p<\infty,\end{cases}\\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\le C\|f\|^p_{H\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

对任意 $y\in B_{j-2}$ 及 $1<q\le q_0$, 由 Hölder 不等式, 条件 (1.3) 及序列 $\{C_l2^{l\varepsilon}\}_{l=1}^{\infty}\in l^1$, 有

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^qdx\right)^{1/q}\\
&\le\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}|E_j|^{1/q-1/q_0}\\
&=\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}|E_j|^{1/q_0'+\varepsilon/n}|E_j|^{-\varepsilon/n-1/q'}\\
&=C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}\,|x|^{nq_0/q_0'+\varepsilon q_0}dx\right)^{1/q_0}\\
&\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\left(\int_{|x|>2|y|}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}\,|x|^{nq_0/q_0'+\varepsilon q_0}dx\right)^{1/q_0}\\
&\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_{2^l|y|\le|x|<2^{l+1}|y|}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}\,|x|^{nq_0/q_0'+\varepsilon q_0}dx\right)^{1/q_0}\\
&\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\sum_{l=1}^{\infty}(2^{l+1}|y|)^{n/q_0'+\varepsilon}\,C_l(2^l|y|)^{-n/q_0'}=C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\left(\sum_{l=1}^{\infty}C_l2^{l\varepsilon}\right)|y|^{\varepsilon}\\
&=C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\,|y|^{\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

当 $k\le j-4$ 且 $y\in B_{k+2}$ 时, 容易知道 $y\in B_{j-2}$. 由 a_k 的消失矩条件, Minkowski 不等式, (2.2) 式及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\|(Ta_k)\chi_j\|_q &=\left(\int_{E_j}\left|\int_{B_{k+2}\setminus B_{k-1}}[K(x,y)-K(x,0)]\,a_k(y)dy\right|^qdx\right)^{1/q}\\
&\le\left(\int_{E_j}\left(\int_{B_{k+2}}|K(x,y)-K(x,0)|\,|a_k(y)|dy\right)^qdx\right)^{1/q}\\
&\le\int_{B_{k+2}}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^qdx\right)^{1/q}|a_k(y)|dy\\
&\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\int_{B_{k+2}}|y|^{\varepsilon}|\,a_k(y)|dy\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\,2^{k\varepsilon}\,\|a_k\|_q\,|B_k|^{1/q'}\\
&\le C2^{-j(\varepsilon+n/q')}\,2^{k(\varepsilon+n/q')}\,2^{-k\alpha}=C2^{-j\alpha}\,2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))}\\
&:=C2^{-j\alpha}W(j,k).
\end{aligned}\tag{2.3}$$

注意到 $\alpha < n(1-1/q)+\varepsilon$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p}\Big(\sum_{k=-\infty}^{j-4}|\lambda_k|2^{-j\alpha}W(j,k)\Big)^p\\
&\le \begin{cases} C\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{j-4}|\lambda_k|^p W(j,k)^p, & 0<p\le 1;\\ C\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{j-4}|\lambda_k|^p W(j,k)\Big)\Big(\sum_{k=-\infty}^{j-4}W(j,k)\Big)^{p/p'}, & 1<p<\infty,\end{cases}\\
&\le \begin{cases} C\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=k+4}^{\infty}W(j,k)^p, & 0<p\le 1;\\ C\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\sum_{j=k+4}^{\infty}W(j,k), & 1<p<\infty,\end{cases}\\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p \le C\|f\|^p_{H\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

结合 I_1 与 I_2 的估计, 我们得到

$$\|Tf\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} \le C\|f\|_{H\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}.$$

推论 2.1 设 T 是经典 Calderón–Zygmund 算子, $0<p<\infty$, $1<q<\infty$ 及 $n(1-1/q)\le \alpha < n(1-1/q)+\delta$. 则 T 是从 $H\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

3 交换子的有界性

定义 3.1 设 b 是 R^n 上的函数, $\alpha\ge n(1-1/q)$ 且 $1<q<\infty$. 称函数 a 为中心 (α, q, b) 原子, 如果

(1) a 为 (α, q) 原子,

(2) $\int_{\mathrm{R}^n} a(x)b(x)dx = 0$.

称函数 a 为限制型中心 (α, q, b) 原子, 若满足上述条件 (2) 及 (1′): a 是限制型中心 (α, q) 原子.

定理 3.1 设 T 是 Calderón–Zygmund 型算子, $q_0>2$ 是条件 (1.3) 中的常数, $\varepsilon>0$ 且序列 $\{C_j 2^{j\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty}\in l^1$. 若 $b\in\dot\Lambda_\beta$, 其中 $0<\beta<\min\{1, n(1-2/q_0)\}$, $0<p<\infty$, $1<q_1\le nq_0/(n+\beta q_0)$, $1/q_2=1/q_1-\beta/n$ 及 $n(1-1/q_1)\le\alpha<n(1-1/q_1)+\varepsilon$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$\|[b,T]a\|_{\dot K_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}$$

对任意中心 (α, q_1, b) 原子 a 成立.

证明 设 a 是中心 (α, q_1, b) 原子且 $\operatorname{supp} a\subset B(0,r)$, 其中 $r>0$, 则存在整数 k, 使得 $2^{k-1}<r\le 2^k$. 记

$$
\begin{aligned}
\|[b,T]a\|^p_{\dot K_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\|([b,T]a)\chi_j\|^p_{q_2}\\
&= \sum_{j=k+2}^{\infty}2^{j\alpha p}\|([b,T]a)\chi_j\|^p_{q_2} + \sum_{j=-\infty}^{k+1}2^{j\alpha p}\|([b,T]a)\chi_j\|^p_{q_2}\\
&:= \mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

我们先估计 J_2, 利用定理 C 中 $[b,T]$ 的 (L^{q_1},L^{q_2}) 有界性, 有

$$\mathrm{J}_2\le C\|b\|^p_{\dot\Lambda_\beta}\sum_{j=-\infty}^{k+1}2^{j\alpha p}\|a\|^p_{q_1}\le C\|b\|^p_{\dot\Lambda_\beta}\sum_{j=-\infty}^{k+1}2^{(j-k)\alpha p}\le C\|b\|^p_{\dot\Lambda_\beta}. \tag{3.2}$$

再估计 J_1. 当 $j\ge k+2$ 时, 对任意 $x\in E_j$ 及 $y\in B_k$, 容易知道 $y\in B_{j-2}$ 及

$$|x-y|\le|x|+|y|\le|x|+|x|/2=3|x|/2.$$

由 $q_1\le nq_0/(n+\beta q_0)$ 可知 $q_2\le q_0$. 由 a 的消失矩条件, Minkowski 不等式, (2.2) 式及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\|([b,T]a)\chi_j\|_{q_2}&=\left(\int_{E_j}\left|\int_{B(0,r)}K(x,y)[b(x)-b(y)]\,a(y)dy\right|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}\\
&=\left(\int_{E_j}\left|\int_{B(0,r)}[K(x,y)-K(x,0)]\,[b(x)-b(y)]\,a(y)dy\right|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}\\
&\le\int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_2}|b(x)-b(y)|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}|a(y)|dy\\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_2}|x|^{\beta q_2}dx\right)^{1/q_2}|a(y)|dy\\
&=C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}2^{j\beta}|a(y)|dy\\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j(\varepsilon+n/q_2')}\,2^{j\beta}\int_{B_k}|y|^{\varepsilon}|a(y)|dy\\
&=C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j(\varepsilon+n/q_1')}\int_{B_k}|y|^{\varepsilon}|a(y)|dy\\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j(\varepsilon+n/q_1')}\,2^{k\varepsilon}\left(\int_{B_k}|a(y)|^{q_1}dy\right)^{1/q_1}|B_k|^{1-1/q_1}\\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j(\varepsilon+n/q_1')}\,2^{k\varepsilon}\,2^{-k\alpha}\,2^{kn/q_1'}\\
&=C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j\alpha}\,2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q_1))}\\
&:=C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}2^{-j\alpha}W(j,k).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

由 $\alpha<n(1-1/q_1)+\varepsilon$, 有

$$\mathrm{J}_1\le C|b\|^p_{\dot\Lambda_\beta}\sum_{j=k+2}^{\infty}W(j,k)^p\le C|b\|^p_{\dot\Lambda_\beta}.$$

结合 J_1, J_2 的估计, 得到

$$\|[b,T]a\|_{\dot K^{\alpha,\,p}_{q_2}(\mathrm{R}^n)}\le C|b\|_{\dot\Lambda_\beta}.$$

受文 [1] 的启发, 我们定义 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q}(\mathrm{R}^n)$ 的子空间 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q,\,b}(\mathrm{R}^n)$ 如下: 它的元素是全体序列对 $(\lambda_k,a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, 其中 $\lambda_k\in\mathrm{C}$ 满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p<\infty$, a_k 是中心 $(\alpha,\,q,\,b)$ 原子且 $\operatorname{supp}a_k\subset B_k$. 定义 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q,\,b}(\mathrm{R}^n)$ 的等价类: 称 (λ_k,a_k) 与 (μ_k,e_k) 等价是指

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k[b,T]a_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_k[b,T]e_k.$$

上述等式左右两端在空间 $\dot K^{\alpha,\,p}_{q}(\mathrm{R}^n)$ 中的存在性容易从后面建立的定理 3.2 及定理 3.4 得到. 利用这一等价关系可以定义 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q}(\mathrm{R}^n)$ 上的等价类空间, 仍把它记为 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q}(\mathrm{R}^n)$.

我们记 $H\dot K^{\alpha,\,p}_{q,\,b}(\mathrm{R}^n)$ 中的元素 f 为形式和 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$, 其中 (λ_k,a_k) 是其等价类的任意代

表元且令

$$\|f\|_{H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} = \inf\left\{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p} : f = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k\right\}.$$

若把交换子 $[b,T]$ 在空间 $H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 上的作用定义为

$$[b,T]\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k[b,T]a_k,$$

由其等价关系可知, $[b,T]$ 在 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 上自动有定义且是一一的. 由引理 1.1 容易知道

$$\left(H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n),\ \|\cdot\|_{H\dot{K}_{q,b}^{\alpha,p}}\right) \subset \left(H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n),\ \|\cdot\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}}\right).$$

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下, 交换子 $[b,T]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

证明 对 $f \in H\dot{K}_{q_1,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$, 记 $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$, 其中 a_k 为中心 $(\alpha,\, q_1,\, b)$ 原子, $\operatorname{supp} a_k \subset B_k$ 且 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p < \infty$. 因此

$$\begin{aligned}
\|[b,T]f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}^p &= \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k[b,T]a_k\right\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}^p \\
&\le \sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|\,\|([b,T]a_k)\chi_j\|_{q_2}\right)^p \\
&\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\left(\sum_{k=-\infty}^{j-2}|\lambda_k|\,\|([b,T]a_k)\chi_j\|_{q_2}\right)^p \\
&\quad + C\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p}\left(\sum_{k=j-1}^{\infty}|\lambda_k|\,\|([b,T]a_k)\chi_j\|_{q_2}\right)^p \\
&:= \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由定理 C 中 $[b,T]$ 的 (L^{q_1}, L^{q_2}) 有界性, 类似于 (2.1) 式的估计, 我们有

$$\mathrm{U}_2 \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}^p\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p.$$

与 (3.3) 式的估计相同, 得到 $\|([b,T]a_k)\chi_j\|_{q_2} \le C|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}2^{-j\alpha}W(j,k)$. 类似于 (2.4) 式的估计, 得到 $\mathrm{U}_1 \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}^p\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p$. 因此

$$\|[b,T]f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}.$$

对于 f 的所有上述分解取下确界得到

$$\|[b,T]f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{H\dot{K}_{q_1,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)}.$$

推论 3.1 设 T 是经典 Calderón–Zygmund 算子, $b \in \dot{\Lambda}_\beta$, $0 < \beta < 1$, $0 < p < \infty$, $1 < q_1 < n/\beta$, $1/q_2 = 1/q_1 - \beta/n$ 且 $n(1-1/q_1) \le \alpha < n(1-1/q_1)+\delta$, 则 $[b,T]$ 是从 $H\dot{K}_{q_1,b}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

定理 3.3 设 T 是 Calderón–Zygmund 型算子且 $q_0 > 2$ 是条件 (1.3) 中的常数, $\varepsilon > 0$, $\{C_j 2^{j\varepsilon}\}_{j=1}^{\infty} \in l^1$. 若 $0 < p < \infty$, $1 < q < q_0$ 及 $n(1-1/q) \le \alpha < n(1-1/q)+\varepsilon$, $b \in \mathrm{BMO}$, 则存在常数 $C > 0$, 使得 $\|[b,T]a\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} \le C\|b\|_*$ 对任意中心 (α,q,b) 原子 a 成立, 其中 $\|\cdot\|_*$ 为 BMO 范数.

证明 设 a 是中心 (α, q, b) 原子, $\operatorname{supp} a \subset B(0,r)$, 则存在整数 k, 使得 $2^{k-1} < r \le 2^k$. 类似 (3.1) 式, 记

$$\begin{aligned}\|[b,T]a\|^p_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathrm{R}^n)} &= \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{j\alpha p}\,\|([b,T]a)\chi_j\|_q^p + \sum_{j=-\infty}^{k+1} 2^{j\alpha p}\,\|([b,T]a)\chi_j\|_q^p \\ &:= \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2.\end{aligned}$$

由定理 B 中 $[b,T]$ 的 L^q 有界性, 类似于 (3.2) 式的估计, 有

$$\mathrm{V}_2 \le C\|b\|_*^p.$$

以下我们估计 V_1. 由 a 的消失矩条件及 Minkowski 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\|([b,T]a)\chi_j\|_q &= \left(\int_{E_j}\left|\int_{B(0,r)}[K(x,y)-K(x,0)]\,[b(x)-b(y)]a(y)dy\right|^q dx\right)^{1/q} \\ &\le \int_{B_k}\left(\int_{E_j}[|K(x,y)-K(x,0)|\,|b(x)-b(y)|]^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &\le \int_{B_k}\left(\int_{E_j}[|K(x,y)-K(x,0)|\,|b(x)-b_{B_j}|]^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &\quad+ \int_{B_k}\left(\int_{E_j}[|K(x,y)-K(x,0)|\,|b_{B_j}-b_{B_k}|]^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &\quad+ \int_{B_k}\left(\int_{E_j}[|K(x,y)-K(x,0)|\,|b(y)-b_{B_k}|]^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &= \int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^q\,|b(x)-b_{B_j}|^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &\quad+ |b_{B_j}-b_{B_k}|\int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^q dx\right)^{1/q}|a(y)|dy \\ &\quad+ \int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^q dx\right)^{1/q}|b(y)-b_{B_k}|\,|a(y)|dy \\ &:= \mathrm{V}_{11}+\mathrm{V}_{12}+\mathrm{V}_{13}.\end{aligned}$$

注意到 $1<q<q_0$, 记 $1/t = 1/q - 1/q_0$, 则 $1<t<\infty$. 由 Hölder 不等式, $j \ge k+2$及 (2.2) 式

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{11} &\le \int_{B_k}\left(\int_{E_j}|K(x,y)-K(x,0)|^{q_0}dx\right)^{1/q_0}\left(\int_{E_j}|b(x)-b_{B_j}|^t dx\right)^{1/t}|a(y)|dy \\ &\le C2^{-j(\varepsilon+n/q_0')}\left(\int_{B_k}|y|^\varepsilon|a(y)|dy\right)\left(\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|b(x)-b_{B_j}|^t dx\right)^{1/t}|B_j|^{1/q-1/q_0} \\ &\le C\|b\|_*\,2^{-j(\varepsilon+n/q')}\,2^{k\varepsilon}\,\|a\|_q\,|B_k|^{1/q'} \\ &\le C\|b\|_*\,2^{-j(\varepsilon+n/q')}\,2^{k(\varepsilon+n/q')}\,2^{-k\alpha} \\ &= C\|b\|_*\,2^{-j\alpha}\,2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))}.\end{aligned}$$

类似于 (2.3) 式的估计, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{12} &\le C\,2^{-j\alpha}\,2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))}\,\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|b(y)-b_{B_k}|dy \\ &\le C\|b\|_*\,2^{-j\alpha}\,2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))}\,(j-k).\end{aligned}$$

由 $j \geq k+2$, (2.2) 式及 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{13} &\leq 2^{-j(\varepsilon+n/q')} \int_{B_k} |y|^{\varepsilon} |b(y)-b_{B_k}|\, |a(y)| dy \\ &\leq 2^{-j(\varepsilon+n/q')}\, 2^{k\varepsilon}\, \|a\|_q \left(\frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |b(y)-b_{B_k}|^{q'} dy \right)^{1/q'} |B_k|^{1/q'} \\ &\leq C\|b\|_*\, 2^{-j(\varepsilon+n/q')}\, 2^{k\varepsilon}\, 2^{-k\alpha}\, 2^{kn/q'} = \|b\|_* 2^{-j\alpha} 2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))}.\end{aligned}$$

由上述三个估计得到: 对任意的 $j \geq k+2$, 有

$$\|([b,T]a)\chi_j\|_q \leq C\|b\|_*\, 2^{-j\alpha}\, 2^{(j-k)(\alpha-\varepsilon-n(1-1/q))(j-k)} := C\|b\|_* 2^{-j\alpha}\, V(j,k). \tag{3.5}$$

因此 $\mathrm{V}_1 \leq C\|b\|_*^p \sum_{j=k+2}^{\infty} V(j,k)^p = C\|b\|_*^p$, 从而得到

$$\|[b,T]a\|_{\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)} \leq C\|b\|_*.$$

定理 3.4 在定理 3.3 条件下, 交换子 $[b,T]$ 是从 $H\dot{K}_{q,\,b}^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

证明 对 $f \in H\dot{K}_{q,\,b}^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)$, 记 $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$, 其中 a_k 为中心 $(\alpha,\, q,\, b)$ 原子, $\operatorname{supp} a_k \subset B_k$ 及 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$, 类似于 (3.4) 式的估计

$$\begin{aligned}\|[b,T]f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)}^p &\leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p} \Big(\sum_{k=-\infty}^{j-2} |\lambda_k|\, \|([b,T]a_k)\chi_j\|_q \Big)^p \\ &\quad + C \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j\alpha p} \Big(\sum_{k=j-1}^{\infty} |\lambda_k|\, \|([b,T]a_k)\chi_j\|_q \Big)^p \\ &:= \mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2.\end{aligned}$$

由 $[b,T]$ 的 L^q 有界性, 类似于 (2.1) 式的估计, 有 $\mathrm{W}_2 \leq C\|b\|_*^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p$.

类似于 (3.5) 式的估计

$$\|([b,T]a_k)\chi_j\|_q \leq C\|b\|_*\, 2^{-j\alpha}\, V(j,k), \quad k \leq j-2,$$

从而 $\mathrm{W}_1 \leq C\|b\|_*^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^p$. 因此

$$\|[b,T]f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)} \leq C\|b\|_* \|f\|_{H_b\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)}.$$

推论 3.2 设 T 是经典 Calderón–Zygmund 算子, $0<p<\infty$, $1<q<\infty$ 及 $n(1-1/q) \leq \alpha < n(1-1/q)+\delta$. 若 $b \in \mathrm{BMO}$, 则 $[b,T]$ 是从 $H\dot{K}_{q,\,b}^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,\,p}(\mathrm{R}^n)$ 的有界算子.

致谢 衷心感谢林燕博士与作者的有益讨论.

参 考 文 献

[1] Berndt R., Atomic Hardy space theory for unbounded singular integrals, *Indiana Univ. Math. J.*, 2006, **55**: 1461–1482.

[2] Chang D. C., Li J. F., Xiao J., Weighted scale estimates for Calderón–Zygmund type operators, *Contemporary Mathematics*, 2007, **446**: 61–70.

[3] Li X. W., Yang D. C., Bounedeness of some sublinear operators on Herz spaces, *Illinois J. Math.*, 1996, **40**: 484–501.

[4] Lin Y., Sharp maximal function estimates for Calderón–Zygmund type operators and commutators, To appear in Acta Mathematica Scientia (Chinese Series).

[5] Lu S. Z., Yang D. C., The weighted Herz-type Hardy space and its applications, *Science in China, Ser. A*, 1995, **38**: 662–673.

[6] Zhou Y., Boundedness of sublinear operators in Herz-type Hardy spaces, *Taiwanese J. Math.* 2009, **13**: 983–996.